

## ANALISIS DINAMIKA PENYEBARAN COVID-19 DENGAN LAJU INSIDEN *NONLINEAR*

**Nurul Qorima Putri\***

Institut Pertanian Bogor, Bogor, Jawa Barat, Indonesia, 16680

**Paian Sianturi**

Institut Pertanian Bogor, Bogor, Jawa Barat, Indonesia, 16680

**Abstrak.** Penelitian ini difokuskan membahas model epidemik SEIQRS untuk penyebaran penyakit COVID-19 dengan laju insiden nonlinear. Dari hasil analisis model SEIQRS diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Selanjutnya dilakukan analisis perilaku selesainya dengan menggunakan nilai eigen dan sifat kestabilan disekitar titik kesetimbangan, hasilnya diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit mempunyai dua sifat kestabilan yaitu *saddle point* dan stabil. Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika  $\mathcal{R}_0 < 1$ , apabila  $\mathcal{R}_0 > 1$  maka titik kesetimbangan tidak stabil (*saddle point*) dan sebaliknya titik kesetimbangan endemik positif akan bersifat spiral stabil. Pada analisis numerik dilakukan dengan memvariasikan nilai-nilai parameter dan menggunakan pendekatan runge-kutta orde empat.

**Kata Kunci:** COVID-19, Laju Insiden Nonlinear, Model SEIQRS, Sifat Kestabilan, Titik Kesetimbangan.

**Abstract.** *This research is focused on discussing the SEIQRS epidemic model for the spread of the COVID-19 disease with a nonlinear incidence rate. From the result of analysis of the SEIQR model obtained two equilibrium point these are diseases free equilibrium points and endemic equilibrium point. Then, the analysis of the completion behavior is done by using eigenvalues and stability around equilibrium point, the obtained result of the diseases free equilibrium point has two stability traits are saddle point, and stable. The stability diseases free equilibrium will be stable when  $\mathcal{R}_0 < 1$ , if  $\mathcal{R}_0 > 1$  then the equilibrium point is not stable (saddle point) and conversely the positive endemic equilibrium point will be spiral stable. In numerical analysis, it is done by varying the parameter values and using the fourth order runge-kutta approach.*

**Keywords:** *COVID-19, Nonlinear Incidence Rate, SEIQRS Model, Properties of Stability, Point of Equilibrium.*

Sitasi: Putri, N.Q., & Sianturi, P. 2021. Analisis Dinamika Penyebaran COVID-19 Dengan Laju Insiden Nonlinier *MES (Journal of Mathematics Education and Science)*, 6(2): 9-32.

<b>Submit:</b> 02 Januari 2021	<b>Revisi:</b> 01 Maret 2021	<b>Publish:</b> 30 April 2021
-----------------------------------	---------------------------------	----------------------------------

### PENDAHULUAN

*Coronavirus disease 2019* atau dikenal dengan nama COVID-19 adalah penyakit menular yang disebabkan oleh jenis baru dari coronavirus yaitu Sars-CoV-2, sebuah virus RNA, yang dilaporkan pertama kali di Wuhan, Tiongkok pada akhir tahun 2019. Virus ini diduga menyebar diantara orang-orang melalui pernapasan, bersin ataupun batuk. Penyebaran lain dari virus ini yaitu akibat menyentuh permukaan benda yang telah terkontaminasi dan menyentuh wajah seseorang. (Gennaro *et al.* 2020)

\*Corresponding Author: @gmail.com

Kasus penyebaran COVID-19 hingga 13 november 2020 telah mencapai 628.136 jiwa telah dirawat di rumah sakit karna terinfeksi virus corona. Kasus COVID-19 menurut WHO Wilayah Asia Tenggara (SEAR) mengalami peningkatan mingguan tertinggi dalam kasus kumulatif di antara semua Wilayah WHO pada bulan pertama. Kenaikan mingguan tertinggi di wilayah dilaporkan di Myanmar sekitar 1513 kasus, diikuti oleh Nepal dan India dengan persentase sekitar 10%. Indonesia merupakan negara yang menempati urutan kedua puluh satu setelah Iraq. Hal tersebut terlihat sejak awal penyebaran hingga pertengahan bulan November 2020 selalu mengalami peningkatan yang cukup signifikan. Pada tanggal 16 november 2020 sebanyak 470.648 orang dengan COVID-19 yang dikonfirmasi. Ada 15.296 kematian terkait COVID-19 yang dilaporkan dan 395.443 pasien telah pulih dari penyakit tersebut. (WHO 2020)

Pemodelan matematika merupakan salah satu cabang dari matematika terapan yang bertujuan untuk menggambarkan dan menjelaskan masalah-masalah yang ada dalam dunia real kedalam bentuk matematika. Model matematika adalah model yang digambarkan dalam sistem persamaan diferensial. Penggunaan persamaan diferensial merupakan dasar dalam memahami dan menyelesaikan masalah yang berkaitan dengan kesehatan seperti penyebaran penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri, virus maupun parasit. Suatu individu dapat terjangkit penyakit menular melalui kontak langsung maupun tidak langsung dengan individu yang terinfeksi penyakit. Terjadinya suatu infeksi baru yang menjadi tanda adanya penyebaran penyakit merupakan akibat dari kontak langsung antar individu. Penyebaran penyakit yang terjadi terus menerus ini akan mengakibatkan kondisi yang disebut dengan epidemik. (Zeb *et al.* 2020)

Metode penanggulangan efektif dapat dilakukan untuk mengurangi resiko penyebaran epidemik terutama COVID-19 adalah dengan melakukan karantina terhadap penderita infeksi. karantina adalah memisahkan dan membatasi kegiatan orang yang sudah terinfeksi virus corona tapi belum ataupun yang sudah menunjukkan gejala. Dengan adanya karantina diharapkan bahwa individu yang terinfeksi atau meninggal dapat berkurang. Semakin banyaknya kasus epidemik yang terjadi mendorong banyak peneliti yang melakukan penelitian mengenai metode penyebaran penyakit atau dalam matematika dikenal model epidemik. (Zulaikha *et al.* 2017)

Pada tahun 1927, W. O. Kermack dan A. G. McKendrick memperkenalkan teori klasik model epidemik pertama kali yaitu SIR (*Susceptible-Infective-Recovered*) yang menjelaskan bahwa dalam sebuah populasi suatu individu dapat rentan terhadap suatu penyakit, lalu terinfeksi, dan dapat sembuh dari suatu infeksi tersebut. Teori ini membawa pengaruh besar terhadap pemodelan matematika karna sangat relevan dengan kehidupan nyata, oleh karna itu banyak penelitian tentang model epidemik diteliti dan dikembangkan seperti model penyebaran COVID-19. Sejak awal terdeteksinya virus corona, banyak bentuk model penyebaran virus corona yang diteliti. Salah satu bentuk pemodelan yang dapat diterapkan yaitu pada masalah penyebaran penyakit seperti COVID-19 yang telah diteliti oleh Ndairou *et al.* (2020) tentang pemodelan matematika penyebaran COVID-19 terhadap kasus yang terjadi di Wuhan. Mishra *et al.* (2020), yang meneliti tentang pengaruh karantina terhadap penyebaran virus SARS CoV-2. Sasmita *et al.* (2020) meneliti tentang control optimal pada model matematika untuk pola perkembangan COVID-19 di Indonesia.

Penelitian ini berdasarkan penelitian sebelumnya yang telah dilakukan oleh Rohith dan Devika (2020), yang meneliti tentang dinamika dan pengendalian pandemic COVID-19 dengan laju insiden nonlinear yang menggunakan model tipe SEIR. Pada penelitian ini, akan dibahas tentang kestabilan model penyebaran COVID-19 dengan model SEIQRS karena memiliki permasalahan yang sesuai dengan jenis penyebaran COVID-19 yang terjadi di masyarakat.

## METODE

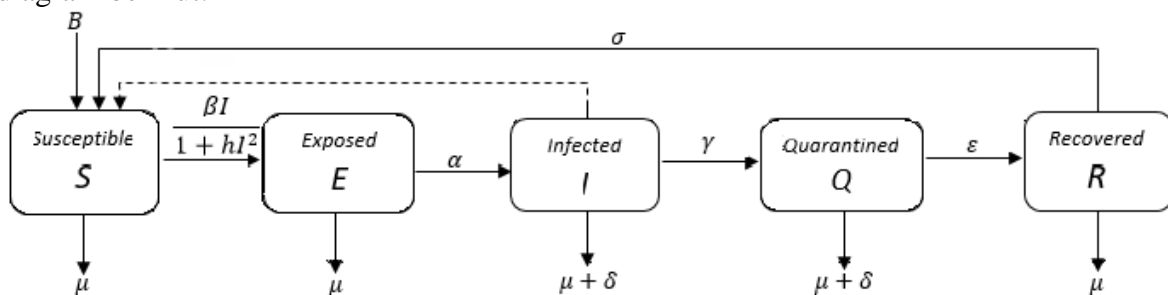
Penelitian karya ilmiah ini menggunakan metode kepustakaan studi literature dan kemudian mengimplementasikan model penyebaran COVID-19 dan laju insiden nonlinear ke dalam program computer menggunakan *software* GNU Octave. Adapun proses kerja yang dilakukan sebagai berikut:

1. Mengkonstruksi penyebaran penyakit pada model penyebaran COVID-19 dan laju insiden nonlinear berdasarkan asumsi.
2. Menentukan titik kesetimbangan dari system persamaan diferensial.
3. Kontruksi teorema kestabilan
4. Membuat simulasi numerik dari penyebaran COVID-19 dan laju insiden nonlinear dengan menggunakan data yang didasarkan pada literatur.
5. Mengintrepetasikan dan menganalisa hasil yang diperoleh.

## HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini, akan dilakukan modifikasi model penyebaran COVID-19 yang mengacu pada model utama yang telah disajikan oleh Rohith dan Devika (2020) dengan menambahkan populasi isolasi (Q) seperti pada penelitian Zeb *et al.* (2020) dan populasi yang telah sembuh (R) dapat kembali menjadi populasi rentan seper. Alasan dari memodifikasi model yang telah disajikan oleh Rohith dan Devika (2020) karna lebih relevan dengan dunia nyata yaitu beberapa pasien yang sudah sembuh dari virus corona, kemudian dinyatakan positif kembali. Korea Selatan telah melaporkan lebih dari 116 kasus seperti ini, sementara lima hingga 15 persen pasien yang pulih di China termasuk dalam kategori ini., hal ini seperti yang dilaporkan oleh To *et al.* (2020) bahwa pasien yang telah sembuh dari COVID-19 dapat terserang kembali.

Model modifikasi penyebaran COVID-19 akan membagi populasi individu ke dalam tiga kompartemen yang terdiri dari populasi individu rentan (S), populasi individu laten (E), populasi individu terinfeksi (I), populasi individu diisolasi (Q), dan populasi yang sembuh (R). Secara skematis, pola model modifikasi penyebaran COVID-19 digambarkan dalam diagram berikut:



Berdasarkan skema diatas diperoleh model penyebaran COVID-19 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= B - \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \mu S + \sigma R \\
 \frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \alpha E - \mu E \\
 \frac{dI}{dt} &= \alpha E - \gamma I - \mu I - \delta I \\
 \frac{dQ}{dt} &= \gamma I - \varepsilon Q - \mu Q - \delta Q \\
 \frac{dR}{dt} &= \varepsilon Q - \mu R - \sigma R
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

dimana  $B, \beta, \alpha, \gamma, \varepsilon, \mu, h, \sigma > 0$

Keterangan :

$B$  : Laju kelahiran individu.

$S(t)$  : Individu yang sehat atau rentan terinfeksi penyakit pada waktu  $t$ .

$E(t)$  : Individu yang dicurigai terinfeksi penyakit (laten) pada waktu  $t$ .

$I(t)$  : Individu yang terinfeksi penyakit difteri pada waktu  $t$ .

$Q(t)$  : Individu yang di karantina pada waktu  $t$ .

$R(t)$  : Individu yang telah sembuh pada waktu  $t$ .

$\mu$  : Laju kematian alami individu.

$\delta$ : Laju kematian individu akibat penyakit.

$\frac{\beta I}{1+hI^2}$ : Laju insiden *nonlinear*, dengan  $h$  adalah konstanta *nonlinear*. Dimana  $h$  sebagai persentase dari total upaya yang diperlukan untuk menahan / mengurangi penyebaran epidemik.

$\beta$ : Laju penularan penyakit.

$\alpha$ : Laju inkubasi.

$\gamma$ : Laju individu terinfeksi yang di karantina.

$\varepsilon$ : Laju kesembuhan individu setelah di karantina.

$\sigma$ : Laju perubahan individu yang telah sembuh kembali menjadi individu rentan.

Titik tetap dari sistem persamaan (1) diperoleh dengan menyelesaikan:

$$\frac{dS}{dt} = 0; \frac{dE}{dt} = 0; \frac{dI}{dt} = 0; \frac{dQ}{dt} = 0; \frac{dR}{dt} = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\begin{aligned} B - \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \mu S + \sigma R &= 0 \\ \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \alpha E - \mu E &= 0 \\ \alpha E - \gamma I - \mu I - \delta I &= 0 \\ \gamma I - \varepsilon Q - \mu Q - \delta Q &= 0 \\ \varepsilon Q - \mu R - \sigma R &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Terdapat dua titik kesetimbangan pada sistem (2) yaitu

$$E_1 = \left( \frac{B}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

$$E_2 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$$

Adapun nilai nilai dari  $S^*, E^*, I^*, Q^*$ , dan  $R^*$  diperoleh dengan software Maple 13.

### Analisis Titik Kesetimbangan

Pada bagian ini akan dianalisis kestabilan titik kesetimbangan dari sistem (2). selanjutnya digunakan deret Taylor sehingga diperoleh:

$$g(S, E, I, Q, R) = B - \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \mu S + \sigma R$$

$$g(S, E, I, Q, R) = \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \alpha E - \mu E \quad (3)$$

$$g(S, E, I, Q, R) = \alpha E - \gamma I - \mu I - \delta I$$

$$g(S, E, I, Q, R) = \gamma I - \varepsilon Q - \mu Q - \delta Q$$

$$g(S, E, I, Q, R) = \varepsilon Q - \mu R - \sigma R$$

Kemudian dilakukan pelinearan pada sistem (4.2) berdasarkan dengan  $\frac{dx}{dt} = Ax$ , dimana  $A$  adalah matriks jacobian. Diperoleh matriks  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

dengan:

$$a_{11} = -\frac{\beta I}{1 + hI^2} - \mu$$

$$a_{13} = -\frac{\beta S}{1 + hI^2} + \frac{2h\beta SI^2}{(1 + hI^2)^2}$$

$$a_{15} = \sigma$$

$$a_{21} = \frac{\beta I}{1 + hI^2}$$

$$a_{22} = -\alpha - \mu$$

$$a_{23} = \frac{\beta S}{1 + hI^2} - \frac{2h\beta SI^2}{(1 + hI^2)^2}$$

$$a_{32} = \alpha$$

$$a_{33} = -\gamma - \mu - \delta$$

$$a_{43} = \gamma$$

$$a_{44} = -\varepsilon - \mu - \delta$$

$$a_{54} = \varepsilon$$

$$a_{55} = -\mu - \sigma$$

### Kestabilan Sistem di Titik Kesetimbangan $E_1$

Diketahui bahwa titik kesetimbangan  $E_1 = \left(\frac{B}{\mu}, 0, 0, 0\right)$ , titik ini merupakan titik tanpa penyakit dimana tidak terdapat infeksi pada suatu populasi tertentu. Jika  $E_1$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{43} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}.$$

dengan:

$$a_{11} = -\mu$$

$$a_{13} = -\frac{\beta B}{\mu}$$

$$a_{15} = \sigma$$

$$a_{22} = -\alpha - \mu$$

$$a_{23} = \frac{\beta B}{\mu}$$

$$a_{32} = \alpha$$

$$a_{33} = -\gamma - \mu - \delta$$

$$a_{43} = \gamma$$

$$a_{44} = -\varepsilon - \mu - \delta$$

$$a_{54} = \varepsilon$$

$$a_{55} = -\mu - \sigma$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_1$  dengan menyelesaikan persamaan  $|\lambda I - A_1| = 0$ , Sehingga diperoleh nilai eigen yaitu

$$\lambda_1 = -\mu,$$

$$\lambda_2 = -\mu - \sigma,$$

$$\lambda_3 = -\varepsilon - \mu - \delta,$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2}(-A + \sqrt{C}), \text{ atau}$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{2}(-A - \sqrt{C}).$$

Dimana :

$$A = \alpha + \gamma + \delta + 2\mu$$

$$C = \gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 + 2\gamma\delta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta + \frac{4\alpha\beta B}{\mu}$$

Karena nilai-nilai parameter  $B, \beta, \alpha, \gamma, \varepsilon, \mu, h, \sigma > 0$  maka nilai eigen yang pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$  dan  $\lambda_3 < 0$ . Untuk  $\lambda_4$  dan  $\lambda_5$  memiliki kemungkinan-kemungkinan yang muncul, yaitu :

1. Jika  $C = 0, \lambda_4 < 0 \& \lambda_5 < 0$
2. Jika  $C > 0$  dan  $0 < A < \sqrt{C}$ , menghasilkan  $\lambda_4 > 0 \& \lambda_5 < 0$ . Dan Jika  $C > 0$  dan  $0 < \sqrt{C} < A$ , menghasilkan nilai eigen  $\lambda_4 < 0 \& \lambda_5 < 0$ .
3. Jika  $C < 0, Re(\lambda_4) < 0 \& Re(\lambda_5) < 0$ .

Diketahui bahwa nilai  $Re(\lambda_4)$  akan bernilai negatif jika  $C < A^2$

Untuk  $C < A^2$

$$\gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 + 2\gamma\delta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta + \frac{4\alpha\beta B}{\mu} < (\alpha + \gamma + \delta + 2\mu)^2$$

$$\frac{\gamma^2 + \delta^2 + \alpha^2 + 2\gamma\delta - 2\alpha\gamma - 2\alpha\delta + \frac{4\alpha\beta B}{\mu}}{(\alpha + \gamma + \delta + 2\mu)^2} < 1$$

$$\frac{\mu\gamma^2 + \mu\delta^2 + \mu\alpha^2 + 2\mu\gamma\delta - 2\mu\alpha\gamma - 2\mu\alpha\delta + 4\alpha\beta B}{(\alpha + \gamma + \delta + 2\mu)^2} < 1$$

diperoleh nilai  $\mathcal{R}_0 = \frac{\mu\gamma^2 + \mu\delta^2 + \mu\alpha^2 + 2\mu\gamma\delta - 2\mu\alpha\gamma - 2\mu\alpha\delta + 4\alpha\beta B}{(\alpha + \gamma + \delta + 2\mu)^2}$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas, dapat disimpulkan dalam teorema berikut :

**Teorema 4.1** Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1$  akan stabil jika bilangan reproduksi dasar  $\mathcal{R}_0 < 1$  dimana

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\mu\gamma^2 + \mu\delta^2 + \mu\alpha^2 + 2\mu\gamma\delta - 2\mu\alpha\gamma - 2\mu\alpha\delta + 4\alpha\beta B}{(\alpha + \gamma + \delta + 2\mu)^2}$$

Berdasarkan persamaan  $(\lambda I - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , Untuk suatu scalar  $\lambda$  dikatakan nilai eigen dari  $A$  dan vektor  $\mathbf{x}$  disebut vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$ . Untuk  $\lambda_1 = -\mu$  dari  $E_1$  diperoleh  $(\lambda_1 I - A_1)v_1 = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\beta B}{\mu} & 0 & \sigma \\ 0 & -\alpha & \frac{\beta B}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\gamma - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\varepsilon - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & -\sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \\ v_{14} \\ v_{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh  $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Untuk  $\lambda_2 = -\mu - \sigma$ , dari  $E_1$  diperoleh  $(\lambda_2 I - A_1)v_2 = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} \sigma & 0 & -\frac{\beta B}{\mu} & 0 & \sigma \\ 0 & -\alpha + \sigma & \frac{\beta B}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\gamma - \delta + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\varepsilon - \delta + \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \\ v_{24} \\ v_{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sehingga diperoleh  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Untuk  $\lambda_3 = -\varepsilon - \mu - \delta$ , dari  $E_1$  diperoleh  $(\lambda_3 I - A_1)v_3 = \mathbf{0}$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon + \delta & 0 & -\frac{\beta B}{\mu} & 0 & \sigma \\ 0 & -\alpha + \varepsilon + \delta & \frac{\beta B}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\gamma + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon - \sigma + \varepsilon + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \\ v_{34} \\ v_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sehingga diperoleh  $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta + \delta^2 - \varepsilon\sigma + \delta\sigma}{\varepsilon\sigma} \\ \frac{\varepsilon + \delta}{\sigma} \end{pmatrix}$ .

Untuk  $\lambda_4 = \frac{1}{2}(-A + \sqrt{C})$  dan  $\lambda_5 = \frac{1}{2}(-A - \sqrt{C})$  dari  $E_1$  diperoleh  $v_4 = v_4^*$  dan  $v_5 = v_5^*$ . Adapun nilai nilai dari  $v_4^*$  dan  $v_5^*$  dapat dilihat pada lampiran 1. Vektor eigen ini diperoleh dengan menggunakan *software* Maple 13, selanjutnya dapat dilihat pada lampiran 1.

Dengan demikian diperoleh solusi umum sebagai berikut

$$x(t) = \sum_{i=1}^n C_i x_i(t)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n C_i v_i e^{\lambda_i t} \\
 &= C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\mu t} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{(-\mu-\sigma)t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\varepsilon^2 + 2\varepsilon\delta + \delta^2 - \varepsilon\sigma + \delta\sigma}{\varepsilon\sigma} \\ \frac{\varepsilon + \delta}{\sigma} \end{pmatrix} e^{(-\varepsilon-\mu-\delta)t} + C_4 v_4^* e^{\left(\frac{1}{2}(-A+\sqrt{C})\right)t} \\
 &\quad + C_5 v_5^* e^{\left(\frac{1}{2}(-A-\sqrt{C})\right)t}
 \end{aligned}$$

dimana  $C_1, C_2, C_3, C_4,$  dan  $C_5$  adalah bilangan real sebarang. Lintasan dalam kasus ini akan ditempatkan pada garis trayektori sepanjang vektor eigen dan arah aliran bergantung pada nilai eigen.

### Kestabilan Sistem di Titik Kesetimbangan $E_2$

Diketahui bahwa titik kesetimbangan  $E_2(S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$ , titik ini merupakan titik kesetimbangan endemi, yaitu suatu kondisi dimana terdapat pertumbuhan populasi individu yang terinfeksi. Namun, pada  $E_2$  yang sesuai dengan Lampiran 1 memberikan bentuk analisis yang cukup kompleks, sehingga untuk menentukan sifat kestabilan pada  $E_2$  cukup sulit. Tidak seperti halnya dengan  $E_1$ , untuk menentukan sifat kestabilan pada  $E_2$  diperlukan adanya simulasi numerik.

### Simulasi Numerik

Simulasi numerik diharapkan mampu memberikan gambaran pengaruh dari parameter penyebaran penyakit. Pada bagian ini dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan *software* Gnu Octave 4.0. Populasi awal (jiwa) yang diambil adalah  $S(0) = 30, E(0) = 4, I(0) = 3, Q(0) = 2, R(0) = 1$ . Dengan lama pengamatan (dalam waktu tahun) yaitu  $t_0 = 0$  sampai  $t_{akhir} = 100$ . Sedangkan estimasi yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 4.1 :

**Tabel 1** Nilai Parameter Model Mangsa Pemangsa

Parameter	Definisi	Nilai	Referensi
B	Laju kelahiran individu	0.5	(Odagaki 2020)
$\mu$	Laju kematian alami individu	0.1	(Rohith & Devika 2020)
$\delta$	Laju kematian individu akibat penyakit	0.0047876	(Rafiq <i>et al.</i> 2020)
$h$	total upaya yang diperlukan untuk menahan atau mengurangi penyebaran epidemik.	$0 <$	Asumsi
$\beta$	Laju penularan penyakit	0.4	(Odagaki 2020)
$\alpha$	Laju inkubasi	$\frac{1}{7}$	(Rohith & Devika 2020)
$\gamma$	Laju individu terinfeksi yang di karantina	0.1	(Odagaki 2020)
$\varepsilon$	Laju kesembuhan individu setelah di karantina	0.5	Asumsi
$\sigma$	Laju perubahan individu yang telah sembuh kembali menjadi individu rentan	0.05	Asumsi



### Dampak Parameter Konstanta nonlinear

Untuk melihat dampak dari parameter konstanta nonlinear dengan menggunakan nilai pada Tabel 1 simulasi tingkat penyebaran COVID-19 terdapat 4 kasus.

#### Kasus $h = 0.1$

Diperoleh dua titik kesetimbangan sistem (4) yaitu

$$E_1(5,0,0,0,0),$$

$$E_2(1.005475826, 1.786195218, 1.246026348, 0.2060270992, 0.6867569972).$$

Titik kesetimbangan ini diselesaikan dengan software Maple 13.

#### Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan $E_1$

Jika titik kesetimbangan  $E_1 = (5,0,0,0,0)$ , titik ini merupakan titik bebas penyakit. Jika titik pada  $E_1$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -2 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.2428571429 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_1$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_1| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_1$  yaitu

**Tabel 2.** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1 = -0.1$	$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\lambda_2 = -0.15$	$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\lambda_3 = -0.605$	$v_3 = \begin{pmatrix} 0.1088987051 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1.09941432 \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.593$	<i>Saddle point</i>
$\lambda_4 = 0.311$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.4562970148 \\ 0.3396173862 \\ 0.09405636772 \\ 0.01027010738 \\ 0.01113800461 \end{pmatrix}$		
$\lambda_5 = -0.7586836697$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.425364638 \\ 0.550514688 \\ -0.1419850397 \\ 0.09226034166 \\ -0.07578677255 \end{pmatrix}$		

#### Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan $E_2$

Jika titik kesetimbangan:

$$E_2 = (S, E, I, Q, R) =$$

(1.005475826, 1.786195218, 1.246026348, 0.2060270992, 0.6867569972), titik ini merupakan titik endemik, yaitu suatu kondisi saat terdapat populasi yang terinfeksi. Jika titik pada  $E_2$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

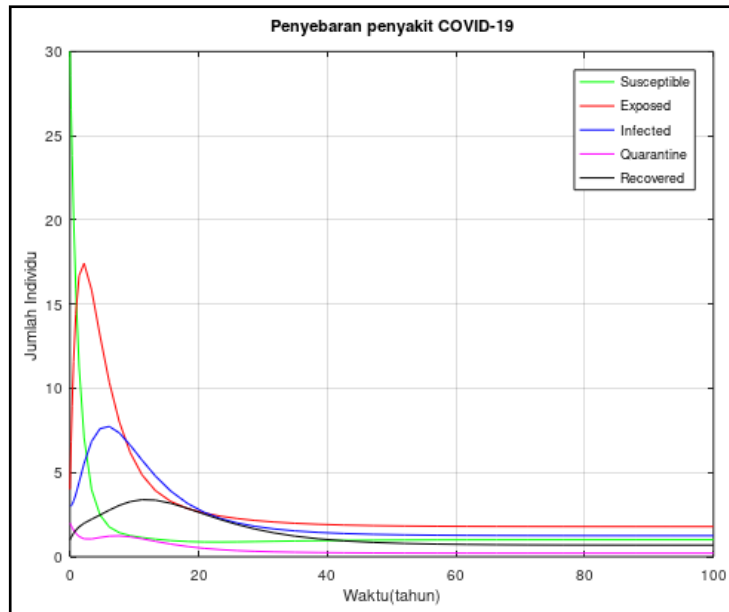
$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.5314278436 & 0 & -0.2545643204 & 0 & 0.05 \\ 0.4314278436 & -0.2428571429 & 0.2545643204 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_2$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_2| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_2$  yaitu

**Tabel 3.** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1$ $= -0.187326327$ $+ 0.1114650555i$	$v_1 = \begin{pmatrix} 0.3682684071 - 0.6207490836i \\ -0.6179832724 - 0.3776860979i \\ -0.5935614173 + 0.6990440805i \\ -0.0909862869 + 0.1917452104i \\ 0.8962797904 + 0.1080007681i \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.593$	<i>Stable Spiral</i>
$\lambda_2$ $= -0.187326327$ $- 0.1114650555i$	$v_2 = \begin{pmatrix} 0.3682684071 + 0.6207490836i \\ -0.6179832724 + 0.3776860979i \\ -0.5935614173 - 0.6990440805i \\ -0.0909862869 - 0.1917452104i \\ 0.8962797904 - 0.1080007681i \end{pmatrix}$		
$\lambda_3$ $= -0.6288110824$ $+ 0.03260306582i$	$v_3 = \begin{pmatrix} -0.07613569461 + 0.676403854i \\ 0.2316936077 - 0.9403162912i \\ -0.1018163454 + 0.3089719822i \\ 0.7633383056 - 0.250173126i \\ -0.8111461485 + 0.2060117541i \end{pmatrix}$		
$\lambda_4$ $= -0.6288110824$ $- 0.03260306582i$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.07613569461 - 0.676403854i \\ 0.2316936077 + 0.9403162912i \\ -0.1018163454 - 0.3089719822i \\ 0.7633383056 + 0.250173126i \\ -0.8111461485 - 0.2060117541i \end{pmatrix}$		
$\lambda_5$ $= -0.1015853685$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.2168623199 \\ 0.4431885435 \\ 0.6134813949 \\ 0.1219154735 \\ 1.259076776 \end{pmatrix}$		

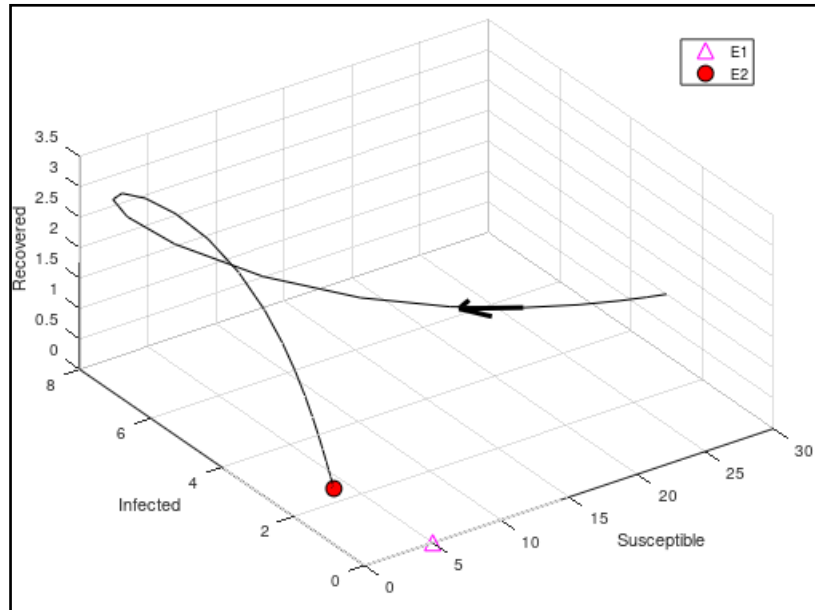
Berdasarkan nilai awal dan parameter-parameter pada Tabel 4.1 dari model penyebaran C)VID-19 diperoleh grafik laju perubahan titik kesetimbangan bebas penyakit pada Gambar 4.1 berikut :



**Gambar 1** Grafik Laju Penyebaran COVID-19

Pada Gambar 1 menunjukkan grafik laju penyebaran COVID-19 dengan nilai parameter sesuai dengan Tabel 1 dimana konstanta nonlinear sebesar 10% atau  $h = 0.1$ . Sehingga dapat ditunjukkan bahwa jumlah populasi *susceptible* yang digambarkan dengan garis hijau pada awalnya hanya sebesar 30 jiwa. Sejak awal populasi *susceptible* (garis hijau) terus mengalami penurunan hingga pada titik tertentu tidak akan ada perubahan jumlah. Untuk jumlah populasi *exposed* (garis merah) pada awalnya sebanyak 4 jiwa lalu mengalami peningkatan drastis hingga pada titik tertentu, laju pertumbuhan populasi *exposed* mengalami penurunan yang signifikan hingga pada waktu tertentu jumlah populasi yang laten tidak mengalami perubahan. Pada kelompok *infected* (garis biru) yang awalnya berjumlah 3 jiwa dapat dilihat pada Gambar 1 akan mengalami peningkatan yang signifikan, kemudian pada titik tertentu mengalami penurunan akibat adanya individu pada kelompok *infected* akan mengalami kematian alami maupun kematian karena penyakit dan sebagian individu akan melakukan proses karantina. Pada kelompok *quarantined* (garis merah muda) awalnya berjumlah 2 jiwa akan bergerak turun akibat adanya individu yang terinfeksi penyakit mengalami kematian alami dan juga kematian akibat penyakit yang mengakibatkan individu tersebut belum terkarantina serta adanya individu yang sembuh setelah karantina. Kelompok *recovered* yang awalnya berjumlah 1 jiwa akan mengalami peningkatan namun pada waktu tertentu bergerak turun akibat adanya individu yang mengalami kematian alami dan juga kembali menjadi *susceptible*.

Selanjutnya kestabilan antara ketiga populasi dapat dilihat pada Gambar 2 berikut:



**Gambar 2** Phase Portrait untuk Populasi S,I,R pada Setiap Titik Kesetimbangan

Gambar 2 terlihat bahwa garis dengan titik awal (30,4,3,2,1) menuju ke titik kesetimbangan  $E_2$  (bulatan penuh) yang spiral stabil disekitar titik kesetimbangan ini. Sedangkan titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat saddle (segitiga).

**Kasus  $h = 0.5$**

Diperoleh dua titik kesetimbangan sistem (4) yaitu

$$E_1(5,0,0,0,0),$$

$$E_2(1.414659193, 1.603224395, 1.118388303, 0.1849224923, 0.6164083078).$$

**Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan  $E_1$**

Jika titik kesetimbangan  $E_1 = (5,0,0,0,0)$ , titik ini merupakan titik bebas penyakit. Jika titik pada  $E_1$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -2 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.2428571429 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_1$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_1| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_1$  yaitu

**Tabel 4.** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1 = -0.1$	$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\lambda_2 = -0.15$	$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\lambda_3 = -0.6047876$	$v_3 = \begin{pmatrix} 0.1088987051 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1.09941432 \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.592929516$	<i>Saddle point</i>
$\lambda_4 = 0.3110389268$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.4562970148 \\ 0.3396173862 \\ 0.09405636772 \\ 0.01027010738 \\ 0.01113800461 \end{pmatrix}$		
$\lambda_5 = -0.7586836697$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.425364638 \\ 0.550514688 \\ -0.1419850397 \\ 0.09226034166 \\ -0.07578677255 \end{pmatrix}$		

**Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan  $E_2$**

Jika titik kesetimbangan

$$E_2 = (S, E, I, Q, R) =$$

(1.414659193, 1.603224395, 1.118388303, 0.1849224923, 0.6164083078), titik ini merupakan titik endemik, yaitu suatu kondisi saat terdapat populasi yang terinfeksi. Jika titik pada  $E_2$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

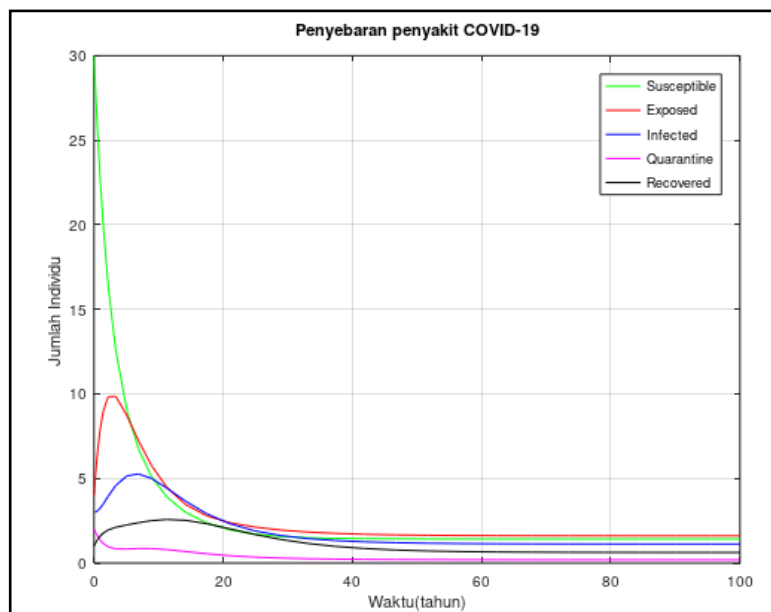
$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.3752284777 & 0 & -0.08023530708 & 0 & 0.05 \\ 0.2752284777 & -0.2428571429 & 0.08023530708 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_2$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_2| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_2$  yaitu

**Tabel 5.** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1$ $= -0.2006759077$ $+ 0.1059443979i$	$v_1 = \begin{pmatrix} 0.239667238 - 0.5190607671i \\ -0.5941966342 - 0.4137732182i \\ -0.5881480866 + 0.7783984001i \\ -0.8893035349 + 0.2159341446i \\ 0.9927174121 - 0.0551391033i \end{pmatrix}$		
$\lambda_2$ $= -0.2006759077$ $- 0.1059443979i$	$v_2 = \begin{pmatrix} 0.239667238 + 0.5190607671i \\ -0.5941966342 + 0.4137732182i \\ -0.5881480866 - 0.7783984001i \\ -0.8893035349 - 0.2159341446i \\ 0.9927174121 + 0.0551391033i \end{pmatrix}$		
$\lambda_3$ $= -0.4789981824$	$v_3 = \begin{pmatrix} 0.4951005328 \\ -0.7011706722 \\ 0.3652931184 \\ 0.2904005168 \\ -0.4413406097 \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.593$	<i>Stable spiral</i>
$\lambda_4$ $= -0.1014179562$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.0422609477 \\ -0.3806868519 \\ -0.5261103152 \\ -0.1045176885 \\ -1.075682288 \end{pmatrix}$		
$\lambda_5$ $= -0.5958928666$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.3493068775 \\ 0.2969747261 \\ 0.1084745315 \\ -1.219536638 \\ 1.367522031 \end{pmatrix}$		

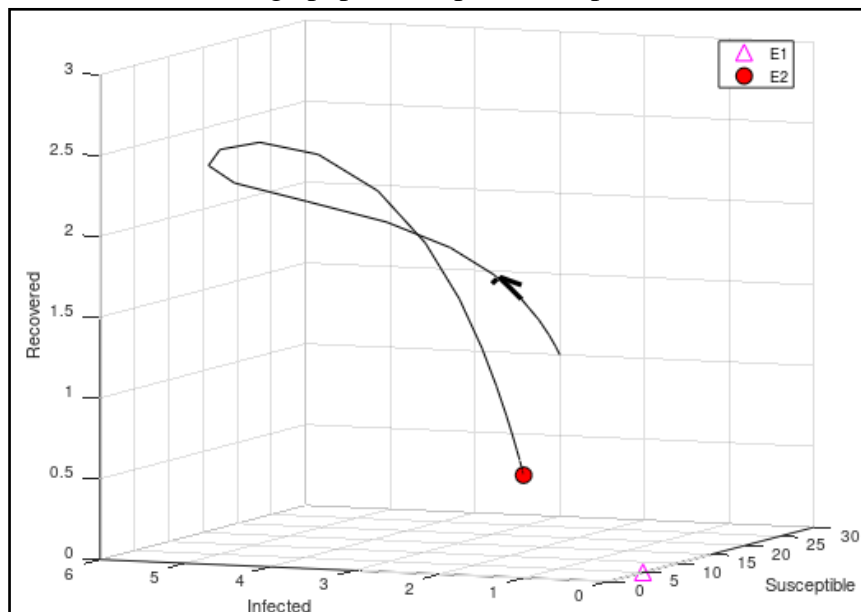
Berdasarkan nilai awal dan parameter-parameter pada Tabel 1 dari model penyebaran COVID-19 diperoleh grafik laju perubahan titik kesetimbangan bebas penyakit pada Gambar 3 berikut :



**Gambar 3** Grafik Laju Penyebaran COVID-19

Pada Gambar 3 menunjukkan grafik laju penyebaran COVID-19 dengan nilai parameter sesuai dengan Tabel 1 dimana konstanta nonlinear sebesar 50% atau  $h = 0.5$ . Sehingga dapat ditunjukkan bahwa jumlah populasi *susceptible* yang digambarkan dengan garis hijau pada awalnya hanya sebesar 30 jiwa. Sejak awal populasi *susceptible* (garis hijau) terus mengalami penurunan hingga pada titik tertentu tidak akan ada perubahan jumlah. Untuk jumlah populasi *exposed* (garis merah) pada awalnya sebanyak 4 jiwa lalu mengalami peningkatan hingga pada titik mendekati 10, laju pertumbuhan populasi *exposed* mengalami penurunan yang signifikan hingga pada waktu tertentu jumlah populasi yang laten tidak mengalami perubahan. Pada kelompok *infected* (garis biru) yang awalnya berjumlah 3 jiwa dapat dilihat pada Gambar 1 akan mengalami peningkatan yang signifikan, kemudian pada titik tertentu mengalami penurunan akibat adanya individu pada kelompok *infected* akan mengalami kematian alami maupun kematian karena penyakit dan sebagian individu akan melakukan proses karantina. Pada kelompok *quarantined* (garis merah muda) awalnya berjumlah 2 jiwa akan bergerak turun akibat adanya individu yang terinfeksi penyakit mengalami kematian alami dan juga kematian akibat penyakit yang mengakibatkan individu tersebut belum terkarantina serta adanya individu yang sembuh setelah karantina. Kelompok *recovered* (garis hitam) yang awalnya berjumlah 1 jiwa mengalami peningkatan namun pada waktu tertentu bergerak turun akibat adanya individu yang mengalami kematian alami dan juga kembali menjadi *susceptible*.

Selanjutnya kestabilan antara ketiga populasi dapat dilihat pada Gambar 4 berikut:



**Gambar 4** Phase Portrait untuk Populasi S,I,R pada Setiap Titik Kesetimbangan

Gambar 4 terlihat bahwa garis dengan titik awal (30,4,3,2,1) menuju ke titik kesetimbangan  $E_2$  (bulatan penuh) yang spiral stabil disekitar titik kesetimbangan ini. Sedangkan titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat saddle (segitiga).

**Kasus  $h = 0.75$**

Diperoleh dua titik kesetimbangan sistem (4) yaitu

$$E_1(5,0,0,0,0),$$

$$E_2(1.603201716,1.518915542,1.059575553,0.1751979626,0.5839932087).$$

**Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan  $E_1$**

Jika titik kesetimbangan  $E_1 = (5,0,0,0)$ , titik ini merupakan titik bebas penyakit. Jika titik pada  $E_1$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -2 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.2428571429 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_1$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_1| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_1$  yaitu

**Tabel 6** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1 = -0.1$	$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\lambda_2 = -0.15$	$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\lambda_3 = -0.6047876$	$v_3 = \begin{pmatrix} 0.1088987051 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1.09941432 \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.593$	<i>Saddle point</i>
$\lambda_4 = 0.3110389268$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.4562970148 \\ 0.3396173862 \\ 0.09405636772 \\ 0.01027010738 \\ 0.01113800461 \end{pmatrix}$		
$\lambda_5 = -0.7586836697$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.425364638 \\ 0.550514688 \\ -0.1419850397 \\ 0.09226034166 \\ -0.07578677255 \end{pmatrix}$		

**Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan  $E_2$**

Jika titik kesetimbangan:

$$E_2 = (S, E, I, Q, R) =$$

(1.603201716, 1.518915542, 1.059575553, 0.1751979626, 0.5839932087), titik ini merupakan titik endemik, yaitu suatu kondisi saat terdapat populasi yang terinfeksi. Jika titik pada  $E_2$  disubstitusikan pada (4.5), maka diperoleh:



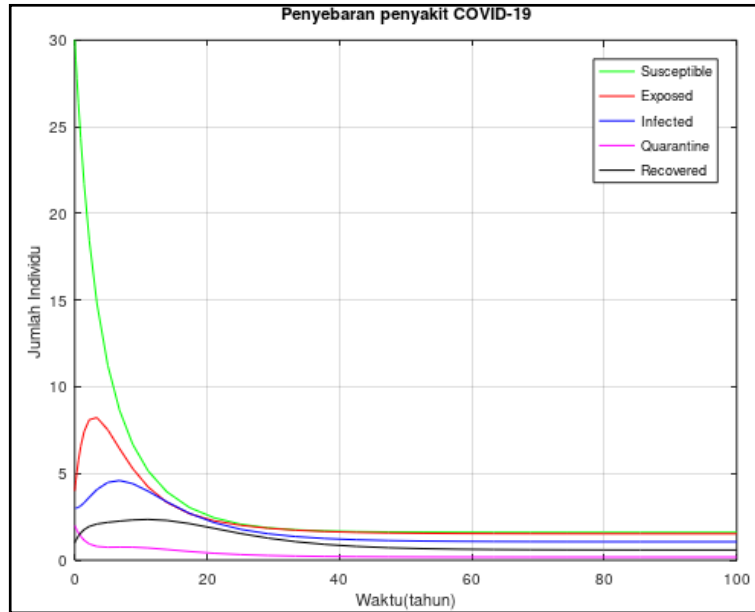
$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.3300892552 & 0 & -0.02985689433 & 0 & 0.05 \\ 0.2300892552 & -0.2428571429 & 0.02985689433 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_2$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_2| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_2$  yaitu

**Tabel 7** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1$ $= -0.4134468586$	$v_1 = \begin{pmatrix} -0.4140637943 \\ -0.6345174742 \\ 0.4344173919 \\ 0.2270386264 \\ -0.4309002334 \end{pmatrix}$		
$\lambda_2$ $= -0.209021$ $+ 0.1037858884i$	$v_2 = \begin{pmatrix} -0.2950981302 + 0.481059134i \\ 0.6125333353 + 0.6190665091i \\ 0.8163711563 - 0.8764273285i \\ 0.1386665997 - 0.257814502i \\ -1.225597165 + 0.0289314050i \end{pmatrix}$		
$\lambda_3$ $= -0.209021$ $+ 0.1037858884i$	$v_3 = \begin{pmatrix} -0.2950981302 - 0.481059134i \\ 0.6125333353 - 0.6190665091i \\ 0.8163711563 + 0.8764273285i \\ 0.1386665997 + 0.257814502i \\ -1.225597165 - 0.0289314050i \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.593$	<i>Stable spiral</i>
$\lambda_4$ $= -0.1013409692$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.1548939798 \\ -0.3553830967 \\ -0.4907749369 \\ -0.09748301197 \\ -1.001694961 \end{pmatrix}$		
$\lambda_5$ $= -0.5996917701$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.2353995105 \\ 0.1565248543 \\ -0.0566230896 \\ -1.111165168 \\ 1.235474205 \end{pmatrix}$		

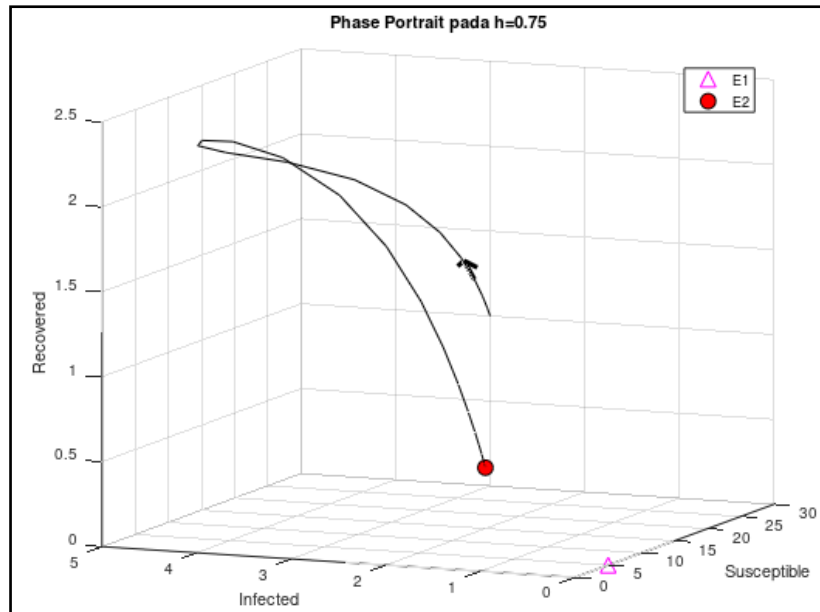
Berdasarkan nilai awal dan parameter-parameter pada Tabel 1 dari model penyebaran COVID-19 diperoleh grafik laju perubahan titik kesetimbangan bebas penyakit pada Gambar 5 berikut :



**Gambar 5** Grafik Laju Penyebaran COVID-19

Pada Gambar 5 menunjukkan grafik laju penyebaran COVID-19 dengan nilai parameter sesuai dengan Tabel 1 dimana konstanta nonlinear sebesar 75% atau  $h = 0.75$ . Sehingga dapat ditunjukkan bahwa jumlah populasi *susceptible* yang digambarkan dengan garis hijau pada awalnya hanya sebesar 30 jiwa. Sejak awal populasi *susceptible* (garis hijau) terus mengalami penurunan hingga pada titik tertentu tidak akan ada perubahan jumlah. Untuk jumlah populasi *exposed* (garis merah) pada awalnya sebanyak 4 jiwa lalu mengalami peningkatan hingga pada titik tertentu, laju pertumbuhan populasi *exposed* mengalami penurunan yang signifikan hingga pada waktu tertentu jumlah populasi yang laten tidak mengalami perubahan. Pada kelompok *infected* (garis biru) yang awalnya berjumlah 3 jiwa dapat dilihat pada Gambar 5 akan mengalami peningkatan yang signifikan yaitu mendekati 5 jiwa, kemudian pada titik tertentu mengalami penurunan akibat adanya individu pada kelompok *infected* akan mengalami kematian alami maupun kematian karena penyakit dan sebagian individu akan melakukan proses karantina. Pada kelompok *quarantined* (garis merah muda) awalnya berjumlah 2 jiwa akan bergerak turun mendekati 0 jiwa akibat adanya individu yang terinfeksi penyakit mengalami kematian alami dan juga kematian akibat penyakit yang mengakibatkan individu tersebut belum terkarantina serta adanya individu yang sembuh setelah karantina. Kelompok *recovered* (garis hitam) yang awalnya berjumlah 1 jiwa mengalami peningkatan, kemudian tidak mengalami perubahan jumlah, namun pada waktu tertentu bergerak turun akibat adanya individu yang mengalami kematian alami dan juga kembali menjadi *susceptible*.

Selanjutnya kestabilan antara ketiga populasi dapat dilihat pada Gambar 6 berikut:



**Gambar 6** Phase Portrait untuk Populasi S,I,R pada Setiap Titik Kestimbangan

Gambar 6 terlihat bahwa garis dengan titik awal (30,4,3,2,1) menuju ke titik kesetimbangan  $E_2$  ( bulatan penuh) yang spiral stabil disekitar titik kesetimbangan ini. Sedangkan titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat saddle (segitiga).

**Kasus  $h = 1$**

Diperoleh dua titik kesetimbangan sistem (4) yaitu

$$E_1(5,0,0,0,0),$$

$$E_2(1.759585439, 1.448986848, 1,010794214, 1.1671320996, 0.5571069986).$$

**Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan  $E_1$**

Jika titik kesetimbangan  $E_1 = (5,0,0,0,0)$ , titik ini merupakan titik bebas penyakit. Jika titik pada  $E_1$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 & -2 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.2428571429 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_1$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_1| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_1$  yaitu

**Tabel 8** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1 = -0.1$	$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$		
$\lambda_2 = -0.15$	$v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$		
$\lambda_3 = -0.6047876$	$v_3 = \begin{pmatrix} 0.1088987051 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1.09941432 \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.593$	<i>Saddle point</i>
$\lambda_4 = 0.3110389268$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.4562970148 \\ 0.3396173862 \\ 0.09405636772 \\ 0.01027010738 \\ 0.01113800461 \end{pmatrix}$		
$\lambda_5 = -0.7586836697$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.425364638 \\ 0.550514688 \\ -0.1419850397 \\ 0.09226034166 \\ -0.07578677255 \end{pmatrix}$		

**Kestabilan sistem pada titik kesetimbangan  $E_2$**

Jika titik kesetimbangan:

$$E_2 = (S, E, I, Q, R) =$$

(1.759585439, 1.448986848, 1, 0.10794214, 1.1671320996, 0.5571069986), titik ini merupakan titik endemik, yaitu suatu kondisi saat terdapat populasi yang terinfeksi. Jika titik pada  $E_2$  disubstitusikan pada (4), maka diperoleh:

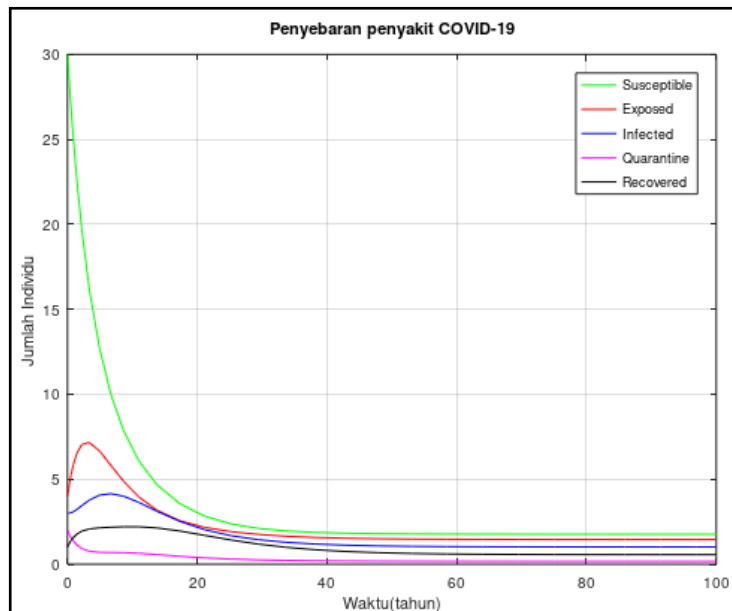
$$A_2 = \begin{bmatrix} -0.2999884736 & 0 & -0.003737605462 & 0 & 0.05 \\ 0.1999884736 & -0.2428571429 & 0.003737605462 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} & -0.2047876 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & -0.6047876 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & -0.15 \end{bmatrix}$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari  $A_2$  yang dibentuk melalui  $|\lambda I - A_2| = 0$ , sehingga diperoleh nilai eigen, vektor eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan sifat kestabilan dari  $A_2$  yaitu

**Tabel 9** Nilai Eigen, Vektor Eigen,  $\mathcal{R}_0$  dan Sifat Kestabilan

Nilai Eigen	Vektor Eigen	$\mathcal{R}_0$	Sifat Kestabilan
$\lambda_1 = -0.364273091$	$v_1 = \begin{pmatrix} 0.355158726 \\ -0.569296671 \\ 0.5099404055 \\ 0.2120206421 \\ -0.4947439767 \end{pmatrix}$		
$\lambda_2 = -0.2178816255 + 0.1027519157i$	$v_2 = \begin{pmatrix} 0.3163578181 - 0.3921375133i \\ -0.6042688591 - 0.7985177679i \\ -0.9870988866 + 0.9659111502i \\ -0.1763855512 + 0.2964934016i \\ 1.399148196 - 0.0660199693i \end{pmatrix}$		
$\lambda_3 = -0.2178816255 - 0.1027519157i$	$v_3 = \begin{pmatrix} 0.3163578181 + 0.3921375133i \\ -0.6042688591 + 0.7985177679i \\ -0.9870988866 - 0.9659111502i \\ -0.1763855512 - 0.2964934016i \\ 1.399148196 + 0.0660199693i \end{pmatrix}$	$\mathcal{R}_0 = 4.593$	<i>Stable spiral</i>
$\lambda_4 = -0.1012772136$	$v_4 = \begin{pmatrix} -0.2471573788 \\ -0.3368488739 \\ -0.4648931315 \\ -0.09233039612 \\ -0.9475073442 \end{pmatrix}$		
$\lambda_5 = -0.601107261$	$v_5 = \begin{pmatrix} -0.1984504875 \\ 0.1103674474 \\ -0.0397829429 \\ -1.080958808 \\ 1.198117273 \end{pmatrix}$		

Berdasarkan nilai awal dan parameter-parameter pada Tabel 1 dari model penyebaran COVID-19 diperoleh grafik laju perubahan titik kesetimbangan bebas penyakit pada Gambar 7 berikut :

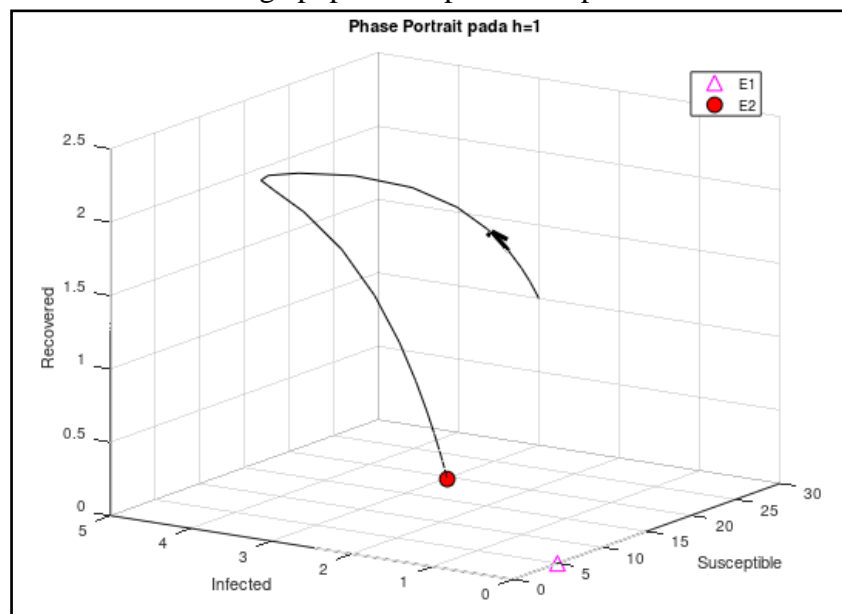


**Gambar 7** Grafik Laju Penyebaran COVID-19

Pada Gambar 7 dimana konstanta nonlinear sebesar 100% atau  $h=1$ . Sehingga dapat ditunjukkan bahwa jumlah populasi *susceptible* yang digambarkan dengan garis hijau pada

awalnya hanya sebesar 30 jiwa. Sejak awal populasi *susceptible* (garis hijau) terus mengalami penurunan hingga pada titik tertentu tidak akan ada perubahan jumlah. Untuk jumlah populasi *exposed* (garis merah) pada awalnya sebanyak 4 jiwa lalu mengalami peningkatan hingga pada titik tertentu, laju pertumbuhan populasi *exposed* mengalami penurunan yang signifikan hingga pada waktu tertentu jumlah populasi yang laten tidak mengalami perubahan. Pada kelompok *infected* (garis biru) yang awalnya berjumlah 3 jiwa dapat dilihat pada Gambar 7 akan mengalami peningkatan yaitu sekitar 4 jiwa, kemudian pada titik tertentu menalami penurunan akibat adanya individu pada kelompok *infected* akan mengalami kematian alami maupun kematian karena penyakit dan sebagian individu akan melakukan proses karantina. Pada kelompok *quarantined* (garis merah muda) awalnya berjumlah 2 jiwa akan bergerak turun mendekati 0 jiwa akibat adanya individu yang terinfeksi penyakit mengalami kematian alami dan juga kematian akibat penyakit yang mengakibatkan individu tersebut belum terkarantina serta adanya individu yang sembuh setelah karantina. Kelompok *recovered* (garis hitam) yang awalnya berjumlah 1 jiwa mengalami peningkatan, kemudian tidak mengalami perubahan jumlah, namun pada waktu tertentu bergerak turun akibat adanya individu yang mengalami kematian alami dan juga kembali menjadi *susceptible*.

Selanjutnya kestabilan antara ketiga populasi dapat dilihat pada Gambar 8 berikut:



**Gambar 8** Phase Portrait untuk Populasi S,I,R pada Setiap Titik Keseimbangan

Gambar 8 terlihat bahwa garis dengan titik awal (30,4,3,2,1) menuju ke titik kesetimbangan  $E_2$  ( bulatan penuh) yang spiral stabil disekitar titik kesetimbangan ini. Sedangkan titik kesetimbangan  $E_1$  bersifat saddle (segitiga).

## KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut :

1. Model penyebaran COVID-19 dengan laju insiden nonlinear diperoleh :

$$\frac{dS}{dt} = B - \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \mu S + \sigma R$$

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{\beta SI}{1 + hI^2} - \alpha E - \mu E \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha E - \gamma I - \mu I - \delta I \\ \frac{dQ}{dt} &= \gamma I - \varepsilon Q - \mu Q - \delta Q \\ \frac{dR}{dt} &= \varepsilon Q - \mu R - \sigma R\end{aligned}$$

2. Terdapat dua titik kesetimbangan yang diperoleh dari model penyebaran COVID-19 dengan laju insiden nonlinear yaitu :

a. Titik kesetimbangan bebas penyakit

$$E_1 = \left( \frac{B}{\mu}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

b. Titik kesetimbangan endemik

$$E_2 = (S^*, E^*, I^*, Q^*, R^*)$$

3. Titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1$  akan stabil jika memenuhi syarat  $\mathcal{R}_0 < 1$ , dimana

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\mu\gamma^2 + \mu\delta^2 + \mu\alpha^2 + 2\mu\gamma\delta - 2\mu\alpha\gamma - 2\mu\alpha\delta + 4\alpha\beta B}{(\alpha + \gamma + \delta + 2\mu)^2}$$

apabila  $\mathcal{R}_0 > 1$  maka titik kesetimbangan  $E_1$  tidak stabil (*saddle point*) dan sebaliknya titik kesetimbangan endemik positif  $E_2$  akan bersifat spiral stabil.

4. Hasil Numerik memperlihatkan bahwa, semakin besar nilai konstanta nonlinear maka peningkatan jumlah populasi individu yang laten dan individu yang terinfeksi akan semakin rendah.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anton, H. (1995). *Aljabar Linear Elementer*. (P. Silaban, & I. N. Susila, Trans.) Jakarta: Erlangga.
- Finizio, N., & Ladas, G. (1982). *Penerapan Diferensial Biasa dengan Penerapan Modern*. (D. W. Santoso, Trans.) Jakarta: Erlangga.
- Gennaro, F. D., Pizzol, D., Marotta, C., Antunes, M., Racalbuto, V., Veronese, N., & Smith, L. (2020). Coronavirus Diseases (COVID-19) Current Status and Future Perspective: A Narrative Review. *International Journal of Environment Research and Public Health*.
- Giesecke, J. (2017). *Modern Infectious Disease Epidemiology* (3rd ed.). U.S: CRC Press.
- Haukkanen, P., Merikoski, J. K., Mattila, M., & Tossavainen, T. (2017). The Arithmetic Jacobian Matrix and Determinant. *Journal of Integer Sequences*, 20.
- Janakat, S., Momani, W. A., Abu-Ismael, L., Awwad, M. A., Ameri, O. A., Gharaibeh, S., & Barakat, H. (2020). A Study on Knowledge, Behavior, and Attitude Toward Novel Coronavirus 2019 (SARS-CoV-2) Among the Jordanian Population. *Asia Pacific Journal of Public Health*, 1-3.
- Jordan, D. W., & Smith, P. (2007). *Nonlinear Ordinary Differential Equation* (4 ed.). New York: Oxford University Press Inc.
- Odagaki, T. (2020). Exact properties of SIQR model for COVID-19. *ELSEVIER: Physica A*.

- Panfilov, A. (2004). *Qualitative Analysis of Differential Equation*. Urrecht: Urrecht University.
- Rafiq, M., Macias-Diaz, J. E., Raza, A., & Ahmed, N. (2020). Design of a nonlinear model for the propagation of COVID-19 and its efficient nonstandard computational implementation. *Applied Mathematical Modelling*, 1835-1846.
- Rohith, G., & Devika, K. B. (2020). Dynamics and control of COVID-19 pandemic with nonlinear incidence rates. 2013-2026.
- Ruan, S., & Wang, W. (2003). Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate. *Journal Of Differential Equations*, 135-163.
- WHO. (2020). *Novel Coronavirus 2019*. Retrieved November 19, 2020, from <https://www.who.int/southeastasia/outbreaks-and-emergencies/novel-coronavirus-2019>
- Wu, Y.-C., Chen, C.-S., & Chan, Y.-J. (2020). The outbreak of COVID-19: An overview. *Journal of the Chinese Medical Association*, 83(3).
- Zeb, A., AlZahrani, E., Erturk, V. S., & Zaman, G. (2020). Mathematical Model for Coronavirus Diseases 2019 (COVID-19) Containing Isolation Class. 2020.
- Zulaikha, Trisilowati, & Fadhilah, I. (2017). Kontrol Optimal pada Model Epidemologi SEIQR dengan Tingkat Kejadian Standar. *Prosiding SI MaNIs (Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami)*, 41-51.