

STUDI TENTANG KESTABILAN MODEL *SIRD-T* DENGAN KRITERIA *ROUTH-HURWITZ* PADA PENYEBARAN SUATU PENYAKIT MENULAR

Tania A. H. Putri Barus*

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Esther Sorta Mauli Nababan

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Mardiningsih

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Muhammad Romi Syahputra

Universitas Sumatera Utara, Medan, Sumatera Utara, Indonesia, 20155

Abstrak. Penelitian ini menginterpretasikan gambaran model matematika *SIRD-T* dalam kasus penyakit campak, bertujuan untuk membentuk titik kesetimbangan (ekuilibrium) yang terdiri dari bebas penyakit dan endemik, menganalisis stabilitas titik ekuilibrium, serta melakukan simulasi numerik melalui parameter yang mempengaruhi penyebaran penyakit campak, sehingga dapat mengurangi penyebarannya. Dalam penelitian ini mengembangkan model *SIRD* dengan menambahkan *Treatment* dan memperhatikan individu yang meninggal akibat terinfeksi penyakit. Adapun data yang digunakan adalah data sekunder dari penelitian sebelumnya seperti, laju infeksi *Susceptible* ke *Infected*, laju kematian penyakit campak, laju sembuh karena *treatment*, dan proporsi yang akan menjalani *treatment*. Sedangkan metode yang digunakan yaitu *Next Generation Matrix (NGM)* dalam menentukan bilangan reproduksi dasar dan *Kriteria Routh-Hurwitz* untuk menganalisis stabilitas model. *Kriteria Routh-Hurwitz* menunjukkan bahwa infeksi tidak meningkat dan sistem akan menjadi stabil asimtotis. Kemudian diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$ artinya tidak terjadi penyebaran pada penyakit campak yang menandakan stabilitas jangka panjang. Sebagai hasil dari simulasi *Odin*, populasi *Susceptible* akan tetap berada pada populasi karena populasi berada dalam kondisi endemik, dan populasi *Infected* seiring berjalannya waktu akan stabil lokal.

Kata Kunci: Bilangan reproduksi dasar, Model *SIRD-T*, *Routh Hurwitz*, Titik ekuilibrium.

Abstract. This research interprets the description of the *SIRD-T* mathematical model in the case of measles, aiming to establish an equilibrium point consisting of disease-free and endemic, analyzing the stability of the equilibrium point, and carrying out numerical simulations through parameters that influence the spread of measles, so as to reduce its spread. In this research, we developed the *SIRD* model by adding *Treatment* and paying attention to individuals who died as a result of being infected with the disease. The data used is secondary data, such as the rate of *Susceptible* to *Infected* infections, the rate of death from measles, the rate of recovery due to *treatment*, and the proportion who will undergo *treatment*. Meanwhile, the method used is the *Next Generation Matrix (NGM)* to determine the basic reproduction number and the *Routh-Hurwitz Criterion* to analyze model stability. The *Routh-Hurwitz* criterion indicates that the infection is not increasing and the system will be asymptotically stable. Then the basic reproduction number $R_0 < 1$ is obtained, meaning that there is no spread of measles, which indicates long-term stability. As a result of *Odin*'s simulation, the *Susceptible* population will remain in the population because the population is in endemic conditions, and the *Infected* population will stabilize locally over time

Keywords: Basic reproduction number, *SIRD-T* Model, *Routh Hurwitz*, Equilibrium point.

Sitasi: Barus, T.A.H.P., Nababan, E.S.M., Mardinarsih, Syahputra, M.R. 2024. Studi Tentang Kestabilan Model *SIRD-T* dengan Kriteria *Routh-Hurwitz* Pada Penyebaran Suatu Penyakit Menular. *MES (Journal of Mathematics Education and Science)*, 10(1): 1-12.

Submit: 30 Mei 2024	Revise: 05 Juni 2024	Accepted: 12 Juli 2024	Publish: 10 Oktober 2024
-------------------------------	--------------------------------	----------------------------------	------------------------------------

PENDAHULUAN

Pemahaman tentang dinamika penyebaran penyakit, khususnya dalam bidang kesehatan, dapat diperoleh melalui kemajuan pengetahuan dalam ilmu matematika. Pemodelan matematika adalah suatu sistem persamaan untuk menggambarkan dan menjelaskan masalah dalam dunia nyata dalam bentuk pernyataan matematika sehingga dapat diformulasikan dan mampu menjelaskan situasi kompleks yang sedang diamati. Model matematika terdiri dari variabel, parameter, dan fungsi yang masing-masing menunjukkan hubungan antara variabel dan parameter (Meksianis Z. Ndi, 2022). Secara umum, pemodelan dapat memperkaya pemahaman seseorang untuk memahami, mengidentifikasi dan menganalisis korelasi antara parameter epidemi dan penyebaran suatu penyakit (Bloom & Reenen, 2013).

Model matematika *SIRD-T* (*Susceptible-Infected-Recovered-Death-Treatment*) adalah satu dari banyak model yang digunakan untuk menganalisis penyebaran suatu penyakit menular. Model ini menggambarkan populasi menjadi lima subpopulasi yaitu S (*Susceptible*) yang merupakan individu rentan terhadap penyakit, I (*Infected*) individu terinfeksi penyakit, R (*Recovered*) individu sembuh dari penyakit tetapi memiliki kekebalan tubuh yang lemah, D (*Death*) individu meninggal akibat penyakit menular, dan T (*Treatment*) individu yang diberi treatment agar memiliki imunitas tubuh yang kuat (Atzzahra et al., 2021). Untuk mengetahui seberapa menyebar suatu penyakit, kita dapat mencari titik ekuilibrium (kesetimbangan), yang terdiri dari titik kesetimbangan saat tidak ada penyakit dan saat penyakit menjadi endemik. Selanjutnya, akan dihitung jumlah reproduksi dasar, yakni jumlah kasus baru yang dihasilkan akibat satu kasus primer pada populasi yang belum terpapar sebelumnya (Naiborhu & Saragih, 2021).

Stabilitas akan menunjukkan apakah suatu penyakit akan menular atau tidak pada populasi (Edossa et al., 2022). Penggunaan kriteria *Routh-Hurwitz* merupakan salah satu metode yang efektif dalam menguji dan mengevaluasi stabilitas suatu sistem. Namun, untuk mengetahui kestabilan, persamaan karakteristik harus dimulai dengan pemfaktoran. Jika persamaan karakteristiknya memiliki orde n yang besar, sehingga sulit untuk menemukan akar-akar karakteristiknya, ini akan menjadi masalah. Dengan menggunakan metode *Routh-Hurwitz* ditunjukkan apakah suatu akar stabil dalam polinomial berorde n tanpa menghitung dan kriteria tersebut dapat digunakan untuk menentukan stabilitas fungsi (Hassan et al., 2022).

Salah satu penyakit yang sangat menular dan terus berkembang pada resolusi geografik berpotensi menyebabkan kematian tertinggi dunia yaitu penyakit campak. Berdasarkan data Kementerian Kesehatan tahun 2023 mencatat kenaikan 32 kali lipat kasus campak yang tersebar di 31 provinsi menunjukkan peningkatan yang signifikan (Putri Yahmal, 2021). Campak atau *Measles* adalah penyakit infeksi disebabkan oleh virus RNA dari genus *morbillivirus*. Tercatat lebih dari 95% kematian anak yang disebabkan oleh kasus campak terjadi di negara-negara berkembang, termasuk Indonesia (Armiatin, 2023). Berdasarkan Laporan Gabungan dari World Health Organization (WHO) menjelaskan pada periode 2021-2022, terjadi peningkatan situasi atau kejadian terkait penyakit campak sebesar 18%, meningkat dari 7.802.000 menjadi 9.232.300. Kemudian perkiraan kematian akibat campak meningkat 43% dari 95.000 menjadi 136.200 (Clinic.vaxcorpindo.com, 2023).

Beberapa penelitian terdahulu yang akan dijadikan dasar. Pada tahun 2022, menggunakan model SEIR untuk menganalisis penyebaran penyakit campak oleh (Nisa et al., 2022).

Penelitian tersebut memperhatikan masa inkubasi penyakit kemudian melakukan analisis kestabilan lokal model di titik kesetimbangan. Studi lain yang relevan dilakukan oleh (Putu Ari Utari, 2019), membahas model kontrol optimal endemi SIR pada penyakit campak. Dengan menggunakan teori kontrol optimal, penelitian ini mengeksplorasi stabilitas penyebaran penyakit campak dengan mencari titik kesetimbangan model bebas penyakit dan endemik. Penelitian oleh (Hakim, 2022) membahas strategi kontrol model SIQR untuk mengontrol penyebaran penyakit campak. Dalam penelitian ini, dilakukan analisis model dan simulasi numerik dengan tujuan mengurangi jumlah subpopulasi yang terinfeksi oleh penyakit campak.

Mengingat angka prevalensi penyakit menular yang masih tinggi dari tahun ke tahun, maka dikembangkan model untuk mengurangi laju penyebaran penyakit campak dengan menambahkan treatment (T) dengan memperhatikan individu meninggal (D) akibat terinfeksi penyakit. Sehingga individu yang sudah terinfeksi penyakit campak memiliki imun tubuh yang kuat karena adanya treatment. Pada model ini tidak memasukkan kompartemen *Exposed* karena untuk penyakit campak memiliki periode inkubasi yang relatif singkat diasumsikan individu yang terinfeksi langsung berpindah dari kompartemen *Susceptible* ke kompartemen *Infected*.

METODE

Penelitian ini merupakan penelitian kuantitatif dengan menggunakan analisis fundamental. Dalam penelitian ini populasi terbagi atas lima subpopulasi yaitu *Susceptible*, *Infected*, *Recovered*, *Death* dan *Treatment*. Data yang digunakan adalah data sekunder seperti laju infeksi *Susceptible* ke *Infected*, laju kematian penyakit campak, laju sembuh karena treatment, dan proporsi yang akan menjalani treatment yang sebelumnya dikaji oleh (Hakim, 2022) dengan memodifikasi parameter laju kematian alami dan angka kelahiran yang akan digunakan dalam simulasi model *SIRD-T*.

Adapun tahapan penelitian sebagai berikut:

1. Studi literatur

Mengumpulkan dan mempelajari berbagai referensi melalui buku, jurnal, karya ilmiah, dan sumber informasi yang relevan dengan subjek penelitian.

2. Identifikasi permasalahan

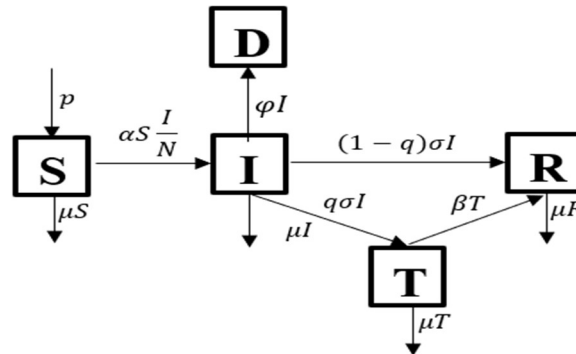
Adapun masalah pada penyebaran penyakit campak, yaitu individu yang sembuh dan yang meninggal diperlakukan sama sehingga tidak ada kompartemen yang berbeda. Maka, dalam penelitian ini digunakan model modifikasi penyebaran yang lebih kompleks yaitu *SIRD-T* dengan menambahkan treatment.

Model yang dibentuk untuk memodelkan penyebaran penyakit menular yaitu model epidemi *SIRD-T*. Dalam model ini, jumlah total populasi (N) dibagi menjadi lima kelas yaitu $N=S+I+R+D+T$. Didefinisikan lima kompartemen karakteristik model matematika sebagai berikut: Kelas rentan (*Susceptible*), menggambarkan jumlah individu yang rentan terhadap penyakit, dinotasikan dengan $S(t)$. Kelas terinfeksi (*Infected*), menggambarkan jumlah individu yang terinfeksi dan dapat menularkan penyakit, $I(t)$. Kelas meninggal (*Death*), menggambarkan jumlah individu yang meninggal akibat penyakit menular (Mitra, 2021), dalam jumlah populasi pada waktu t yang dinotasikan dengan $D(t)$. Kelas sembuh (*Recovered*), menggambarkan jumlah individu yang sembuh dari penyakit menular tetapi memiliki kekebalan tubuh sementara, dinotasikan dengan $R(t)$. Kelas *Treatment*, menggambarkan jumlah individu yang terinfeksi penyakit menular yang diberikan perlakuan berupa treatment (pengobatan), dinotasikan dengan $T(t)$.

3. Perancangan model

Adapun asumsi yang digunakan untuk merumuskan model penyakit campak dengan pengaruh treatment: (1) Dalam populasi, terjadi proses kelahiran dan kematian; (2) Populasi tertutup (konstan), tidak ada proses migrasi dan penambahan atau pengurangan

jumlah individu tidak diperhatikan; (3) Individu yang lahir rentan akan menjadi terinfeksi; (5) Penyakit berbahaya, jika terinfeksi dapat menimbulkan kematian; (6) Individu dari kelas *Infected* dapat menularkan penyakit; (7) Individu dari kelas *Infected* dapat sembuh menjadi individu yang *Recovered* jika sembuh secara alami atau setelah melalui proses *Treatment*; (8) Individu dari kelas *Infected* dapat mengalami kematian karena penyakit menular digolongkan ke kelas *Death*; (9) Individu dari kelas *Recovered* diasumsikan sudah memiliki kekebalan tubuh karena telah menjalani *Treatment*; (10) Setiap individu mengalami kematian alami pada setiap subpopulasi dengan laju proporsional (Wiggins, 1990).



Gambar 1. Diagram Kompartmen Model *SIRD-T*

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= pN - \alpha \frac{S}{N} I - \mu S = p - \left(\alpha \frac{I}{N} + \mu \right) S \\ \frac{dI}{dt} &= \alpha S \frac{I}{N} - \phi I - \mu I - (1 - q)\sigma I - q\sigma I \\ \frac{dT}{dt} &= q\sigma I - \beta T - \mu T = q\sigma I - (\beta + \mu)T \\ \frac{dR}{dt} &= (1 - q)\sigma I + \beta T - \mu R \\ \frac{dD}{dt} &= \phi I \end{aligned} \tag{1}$$

Karena $N(t)$ konstan, sistem dapat disederhanakan dengan menghitung proporsi untuk masing-masing kelas. Proporsi banyak individu pada masing-masing kelas:

$$\begin{aligned} N &= S + I + R + D + T \\ s &= \frac{S}{N}, i = \frac{I}{N}, r = \frac{R}{N}, m = \frac{D}{N}, v = \frac{T}{N} \end{aligned} \tag{2}$$

Sehingga dari persamaan (2) dapat sistem (1) dapat dituliskan:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= p - \alpha si - \mu s \\ \frac{di}{dt} &= \alpha si - \phi i - \mu i - (1 - q)\sigma i - q\sigma i \\ \frac{dr}{dt} &= (1 - q)\sigma i + \beta v - \mu r \\ \frac{dm}{dt} &= \phi i \\ \frac{dv}{dt} &= q\sigma i - \beta v - \mu v \end{aligned} \tag{3}$$

4. Menentukan titik ekuilibrium (kesetimbangan)

Selanjutnya, setelah merancang dan membuat model epidemi, titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik akan ditentukan. (Olsder and Woude, 1994)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{dD}{dt} = 0$$

5. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0)

Bilangan reproduksi dasar akan ditentukan untuk mengetahui serta memahami dinamika dari penyebaran penyakit campak. *Next Generation Matrix* (NGM) akan digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar.

- a. Menentukan persamaan di sekitar kompartemen terinfeksi dan perubahan pada kompartemen terinfeksi.
 - b. Linearisasi dari kompartemen individu yang terinfeksi pada titik ekuilibrium bebas penyakit.
6. Dekomposisi matriks jacobini menjadi transmisi (F) dan transisi (V) sehingga diperoleh FV^{-1} , selanjutnya mencari nilai eigen terbesar FV^{-1} .
7. Menganalisis stabilitas model
 Selanjutnya akan dilakukan analisis stabilitas lokal dengan menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*.
- a. Persamaan untuk polinom orde ke- n disajikan dalam bentuk $a_m s^n - a_{m-1} s^{n-1} + a_{m-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$
 - b. Ketika terdapat koefisien dengan nilai 0 atau negatif, hal ini menunjukkan bahwa terdapat satu akar atau lebih yang bersifat imajiner atau memiliki bagian real positif, yang menandakan ketidakstabilan sistem tersebut.
 - c. Jumlah akar yang tidak stabil dapat diamati dari jumlah perubahan tanda di kolom pertama matriks.
 - d. Kondisi yang diperlukan agar sistem dapat dianggap stabil adalah ketika koefisien dari persamaan karakteristik bernilai positif, sementara kondisi yang cukup adalah ketika semua elemen dalam kolom pertama matriks bernilai positif.
8. Simulasi numerik model
 Nilai parameter yang digunakan berdasarkan penelitian yang dilakukan oleh (Hakim, 2022) tentang model SIQR dalam penyebaran penyakit campak.

Tabel 1. Nilai Parameter Model *SIRD-T*

Variabel	Deskripsi	Nilai
p	Angka kelahiran	0,0005
μ	Laju kematian secara alami	0.002
α	Laju infeksi Susceptible ke Infected	0,4286
φ	Laju kematian penyakit menular	0,0025
β	Laju sembuh karena treatment	0,00625
σ	Laju infeksi yang ditreatment	0,08
q	Proporsi yang akan menjalani treatment	0,3

9. Menganalisis hasil simulasi.
10. Membuat kesimpulan dan saran.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Titik Kesetimbangan (Ekuilibrium) dan Bilangan Reproduksi Dasar

Model *SIRD-T* berupa sistem persamaan (1), dimana sistem tersebut mempunyai titik kesetimbangan (ekuilibrium) bebas penyakit dan endemik

$$\frac{ds}{dt} = \frac{di}{dt} = \frac{dr}{dt} = \frac{dm}{dt} = \frac{dp}{dt} = 0 \quad (4)$$

Teorema 1 Berdasarkan asumsi dari persamaan (4), diperoleh titik kesetimbangan (ekuilibrium) bebas penyakit yaitu $E_0(s, i, r, m, v) = \left(\frac{p}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$.

Bukti.

Titik kesetimbangan (ekuilibrium) bebas penyakit dicapai saat tidak ada individu yang terinfeksi atau tidak ada penyakit dalam populasi. Artinya, bahwa individu yang terinfeksi penyakit campak sama dengan nol ($i = 0$). Karena tidak ada individu yang terinfeksi campak, maka tidak ada individu yang sembuh dari penyakit campak ($r = 0$), serta tidak ada yang melakukan treatment penyakit campak ($v = 0$). Sehingga pada sistem persamaan (3) dapat diperoleh

$$\begin{aligned} p - \alpha i s - \mu s &= 0 \\ p - \mu s &= 0 \\ -\mu s &= -p \\ s &= \frac{p}{\mu} \end{aligned}$$

Maka, diperoleh titik kesetimbangan (ekuilibrium) bebas penyakit ketika $i = 0$ adalah

$$E_0(s, i, r, m, v) = \left(\frac{p}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right).$$

Sehingga terbukti Teorema 1 benar.

Teorema 2 Model *SIRD-T* dalam sistem persamaan (3) dengan asumsi yang terpenuhi, akan diperoleh bilangan reproduksi dasar

$$R_0 = \frac{\alpha p - \mu \varphi}{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}$$

Bukti.

Metode yang digunakan untuk mencari R_0 yaitu metode *Next Generation Matrix* (NGM), sebagai indikator ambang kriteria endemik penyakit pada populasi.

1. Pada model *SIRD-T* penyebaran penyakit campak, menentukan kompartmen yang terinfeksi dan perubahan pada kompartmen infeksi pada sistem persamaan yaitu i dan v . Akan dibentuk menjadi matriks Jabobi untuk pelinearisasian.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{d(\alpha i s - \varphi i - \mu i - (1 - q)\sigma i - q\sigma i)}{di} & \frac{d(\alpha i s - \varphi i - \mu i - (1 - q)\sigma i - q\sigma i)}{dv} \\ \frac{d(q\sigma i - (\beta + \mu)t)}{di} & \frac{d(q\sigma i - (\beta + \mu)v)}{dv} \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} \alpha s - \varphi - \mu - (1 - q)\sigma - q\sigma & 0 \\ q\sigma & -(\beta + \mu) \end{bmatrix}$$

Substitusi E_0 titik ekulibrium bebas penyakit, diperoleh

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} \alpha \left(\frac{p}{\mu}\right) - \varphi - \mu - (1 - q)\sigma - q\sigma & 0 \\ q\sigma & -(\beta + \mu) \end{bmatrix}$$

2. Proses dekomposisi matriks Jacobian menjadi matriks Transmisi (F) dan matriks Transisi (V), sehingga $J = F - V$

F : matriks yang merepresentasikan pertumbuhan baru individu yang terinfeksi penyakit yang kemudian menyebabkan penambahan pada kompartmen infeksi.

V : matriks yang mencerminkan laju penurunan populasi di kompartmen infeksi karena laju perkembangan, kematian dan kesembuhan.

Diperoleh matriks F dan V :

$$F = \begin{bmatrix} \alpha \left(\frac{p}{\mu}\right) - \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; V = \begin{bmatrix} \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma & 0 \\ -q\sigma & (\beta + \mu) \end{bmatrix}$$

Kemudian mencari matriks V^{-1} ,

Dimisalkan $a = \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma$, diperoleh

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{q\sigma}{a(\beta + \mu)} & \frac{1}{(\beta + \mu)} \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh matriks FV^{-1}

$$FV^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha \left(\frac{p}{\mu}\right) - \varphi & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{q\sigma}{a(\beta + \mu)} & \frac{1}{(\beta + \mu)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha \left(\frac{p}{\mu}\right) - \varphi}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Bilangan reproduksi dasar (R_0) diperoleh dengan mengevaluasi nilai eigen dari matriks FV^{-1}

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - FV^{-1}) &= 0 \\ \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\alpha \left(\frac{p}{\mu}\right) - \varphi}{a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= 0 \\ \lambda \left(\lambda - \frac{\alpha \left(\frac{p}{\mu}\right) - \varphi}{a} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Diperoleh $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{\alpha p - \mu \varphi}{\mu a}$

Basic reproduction number (R_0) sebagai nilai eigen terbesar dari matriks *new generation J*

Dipilih

$$R_0 = \frac{\alpha p - \mu \varphi}{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}$$

Titik Ekuilibrium Endemik Penyakit (E_1)

Titik kesetimbangan endemik terjadi ketika terdapat individu yang terinfeksi penyakit dalam populasi, atau ketika jumlah individu terinfeksi penyakit tidak sama dengan nol ($i > 0$). Karena ada individu yang terinfeksi campak, sehingga tidak ada individu yang sembuh dari penyakit campak ($r \neq 0$), serta tidak ada individu yang menjalani treatment penyakit campak ($v \neq 0$).

Dengan mencari nilai s, i, r, v kemudian mensubstitusikan ke dalam persamaan (3) diperoleh:

$$\begin{aligned} i^* &= \frac{\alpha p - \mu(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}{(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)\alpha} \\ s^* &= \frac{p(\alpha(\varphi + \mu + \sigma))}{\alpha(\alpha p - \mu(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)) + \mu(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)\alpha} \\ v^* &= \frac{q\sigma(\alpha p - \mu(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma))}{(\beta + \mu)(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)\alpha} \\ r^* &= \frac{\left((1 - q)\sigma(\alpha p - \mu(\varphi + \mu + \sigma))\right) + \beta \left(q\sigma(\alpha p - \mu(\varphi + \mu + \sigma))\right)}{\mu((\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)\alpha)(\beta + \mu)(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)\alpha} \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa infeksi penyakit campak akan menyebar atau terjadi di dalam populasi tersebut.

Teorema 3 Diasumsikan $E_1(s^*, i^*, r^*, m^*, v^*)$ merupakan titik ekuilibrium endemik penyakit ada jika $R_0 > 1$

Bukti:

Untuk membuktikan setiap elemen E_1 ada akan ditunjukkan bahwa $i^* > 0$ jika $R_0 > 1$

$$i^* = \frac{\alpha p - \mu(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}{(\varphi + \mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)\alpha}$$

Diketahui bahwa

$$R_0 = \frac{\alpha p - \mu\varphi}{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)} \quad (5)$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} i^* &= \frac{\alpha p - \mu\varphi}{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)} - \frac{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}{\alpha} \\ i^* &= \frac{R_0}{\left(\frac{\alpha}{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}\right)} - \frac{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}{\alpha} \\ i^* &= \frac{R_0 (\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma))}{\alpha} - \frac{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}{\alpha} \\ i^* &= \frac{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}{\alpha} (R_0 - 1) \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh bahwa $i^* > 0$ jika $R_0 > 1$. Maka terbukti bahwa Teorema 3 benar.

Analisis Kestabilan dengan Routh-Hurwitz

Kestabilan titik ekuilibrium bebas penyakit pada saat $E_0(s, i, r, m, v) = \left(\frac{p}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ dilakukan dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian dengan linearisasi yang bertujuan untuk memberikan pendekatan atau aproksimasi untuk menganalisis sistem yang merupakan sistem nonlinear.

$$\begin{aligned} J_E &= \begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial s} & \frac{\partial s}{\partial i} & \frac{\partial s}{\partial r} & \frac{\partial s}{\partial m} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial i}{\partial s} & \frac{\partial i}{\partial i} & \frac{\partial i}{\partial r} & \frac{\partial i}{\partial m} & \frac{\partial i}{\partial v} \\ \frac{\partial r}{\partial s} & \frac{\partial r}{\partial i} & \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial r}{\partial m} & \frac{\partial r}{\partial v} \\ \frac{\partial m}{\partial s} & \frac{\partial m}{\partial i} & \frac{\partial m}{\partial r} & \frac{\partial m}{\partial m} & \frac{\partial m}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial i} & \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{\partial m} & \frac{\partial v}{\partial v} \end{bmatrix} \\ J_{E_0} &= \begin{bmatrix} \mu & -a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -\mu & 0 & \beta \\ 0 & \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q\sigma & 0 & 0 & -a_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dengan

$$a_1 = \alpha\left(\frac{p}{\mu}\right),$$

$$a_2 = \alpha\left(\frac{p}{\mu}\right) - \varphi - \mu - (1 - q)\sigma - q\sigma,$$

$$a_3 = (1 - q)\sigma,$$

$$a_4 = \beta + \mu.$$

Selanjutnya akan dicari nilai eigen dari matriks
 $\det(\lambda I - J_{E_0}) = 0$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - \mu & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a_3 & \lambda + \mu & 0 & -\beta \\ 0 & -\varphi & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & -q\sigma & 0 & 0 & \lambda + a_4 \end{vmatrix}$$

Diperoleh,

$$(\lambda + \mu)(\lambda^2 - a_2\lambda - \mu\lambda + a_2\mu)((\lambda + \mu)(\lambda)\lambda^5 + (-a_2 + a_4)\lambda^4 + (-\mu^2 + a_2\mu + a_4\mu - a_2a_4 - a_4\mu)\lambda^3 + (a_2\mu^2 - a_2a_4\mu - a_4\mu^2 - a_2a_4)\lambda^2 + a_2a_4\mu^2\lambda$$

Dimana

$$A_1 = -a_2 + a_4$$

$$A_2 = -\mu^2 + a_2\mu + a_4\mu - a_2a_4 - a_4\mu$$

$$A_3 = a_2\mu^2 - a_2a_4\mu - a_4\mu^2 - a_2a_4$$

$$A_4 = a_2a_4\mu^2$$

$$\lambda^5 + A_1\lambda^4 + A_2\lambda^3 + A_3\lambda^2 + A_4\lambda = 0 \quad (6)$$

Dengan menyusun tabel Kriteria *Routh-Hurwitz* sebagaimana ditunjukkan dalam tabel (2):

Tabel 2. Analisis *Routh-Hurwitz*

λ^5	1	A_2	A_4
λ^4	A_1	A_3	
λ^3	b_1	b_2	
λ^2	c_1		
λ^1	d_1		
λ^0	e_1		

Untuk b_1, b_2, c_1, d_1 diperoleh dari determinan tabel *Routh-Hurwitz*

$$b_1 = \frac{A_1A_2 - A_3}{A_1} \quad b_2 = \frac{A_1A_4}{A_1} = A_4 \quad d_1 = \frac{c_1b_2}{c_1} = b_2$$

$$c_1 = \frac{b_1A_3 - b_2A_1}{b_1} = \frac{\left(\frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}\right)A_3 - A_4A_1}{\frac{A_1A_2 - A_3}{A_1}} = \frac{A_3(A_1A_2 - A_3) - A_1(A_4A_1)}{A_1A_2 - A_3}$$

Berdasarkan kriteria *Routh-Hurwitz* persamaan (6) memiliki akar-akar polinomial bagian real jika dan hanya jika

$$\Leftrightarrow A_1, A_2, A_3, A_4 > 0$$

$$\Leftrightarrow A_1A_2 > A_3$$

$$\Leftrightarrow A_3(A_1A_2 - A_3) > A_1(A_4A_1)$$

Sehingga, karena elemen pada kolom pertama tabel tidak mengalami perubahan tanda atau bernilai positif, maka sistem akan stabil asimtotik. Kondisi ini mencerminkan tingkat infeksi penyakit campak tidak bertambah dan sistem akan mencapai kestabilan bebas penyakit.

Simulasi Model menggunakan Odin

Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi numerik dari model matematika penyakit campak dengan menggunakan Odin. Nilai-nilai dari parameter yang tercantum dalam Tabel 1 akan disubstitusikan ke dalam persamaan 5, sehingga akan menghasilkan:

$$R_0 = \frac{\alpha p - \mu \varphi}{\mu(\mu + (1 + q)\sigma + q\sigma)}$$

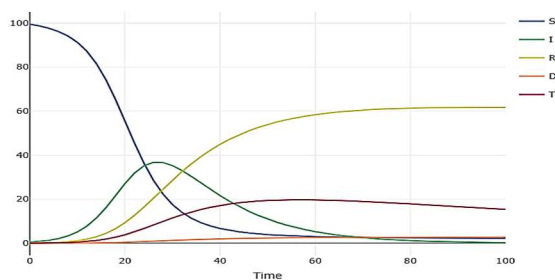
$$R_0 = \frac{0,0005(0,3286) - 0,002(0,0025)}{0,002(0,002 + (1 + 0,3)0,08 + (0,3 \times 0,08))}$$

$$R_0 = 0,61292$$

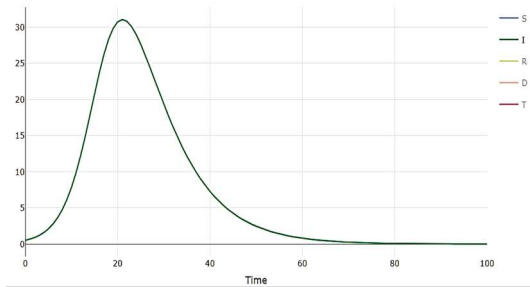
Dari perhitungan bilangan reproduksi dasar, dapat disimpulkan bahwa $R_0 < 1$. Hal ini menunjukkan bahwa tidak terjadinya endemik penyakit campak atau kondisi bebas penyakit. Oleh karena itu dengan berjalannya waktu, populasi terinfeksi akan mengalami penurunan hingga mencapai nol, yang mengindikasikan tidak adanya penyebaran penyakit campak atau bahwa penyakit ini tidak mewabah. Untuk melihat dinamika penyebaran penyakit campak dengan menggunakan treatment, maka akan dilakukan simulasi menggunakan sehingga diperoleh grafik dinamika penyebaran sebagai berikut:

Sumbu x : dinyatakan sebagai waktu dari penyebaran penyakit campak.

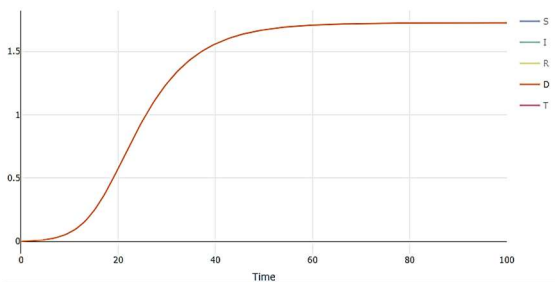
Sumbu y : dinyatakan sebagai populasi.



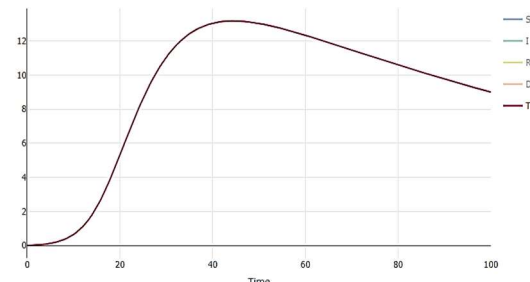
Gambar 2. Model SIRD-T pada Odin



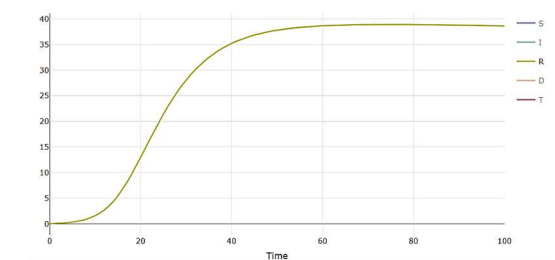
Gambar 3. Dinamika Kelas Infected



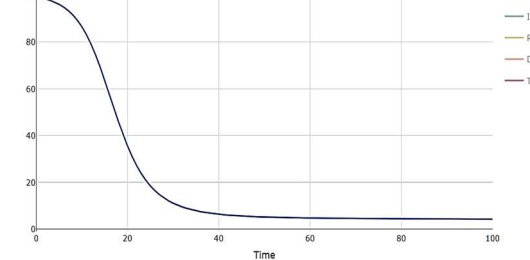
Gambar 4. Dinamika Kelas Death



Gambar 5. Dinamika Kelas Treatment



Gambar 6. Dinamika Kelas Recovered



Gambar 7. Dinamika Kelas Susceptible

Berdasarkan ilustrasi menunjukkan bahwa populasi yang rentan (*Susceptible*) mengalami penurunan karena adanya kematian alami, tetapi populasi yang rentan tidak pernah habis karena populasi berada dalam kondisi endemik. Kemudian jumlah individu yang terinfeksi (*Infected*) mengalami peningkatan pada hari ke-30 dan seiring berjalannya waktu akan menuju nol. Individu yang meninggal akan tetap konstan karena adanya penurunan individu yang terinfeksi. Kemudian populasi yang sembuh (*Recovered*) mengalami peningkatan yang stabil pada hari ke-60 karena adanya pertambahan laju kesembuhan dari individu yang terinfeksi. Serta individu yang terinfeksi akan memiliki sistem kekebalan tubuh yang kuat karena laju populasi yang melakukan *Treatment* mengalami peningkatan dan stabil.

KESIMPULAN

Penelitian ini membahas model *SIRD-T* pada penyakit campak dengan menambahkan treatment dalam mengendalikan penyebaran penyakit campak. Dalam menganalisis stabilitas model, kriteria Routh Hurwitz digunakan dan diperoleh bahwa akar-akar persamaan memiliki akar negatif, artinya jumlah kematian akibat virus campak lebih besar dari jumlah infeksi. Hal ini mengindikasikan bahwa tingkat infeksi tidak meningkat dan sistem akan mencapai kestabilan asimtotik. Selain itu, diperoleh bilangan reproduksi dasar $R_0 < 1$ artinya tidak terjadi penyebaran pada penyakit campak. Kemudian setelah model disimulasikan menggunakan Odin dengan parameter yang telah ditentukan, dapat dilihat bahwa seiring berjalannya waktu, populasi terinfeksi terlihat menurun dan menuju nol artinya tidak ada penyebaran penyakit campak ataupun penyakit ini tidak mewabah.

DAFTAR PUSTAKA

- Armiatin, A. (2023). Faktor-Faktor Yang Berhubungan Dengan Kejadian Campak Di Puskesmas Kota Juang Kabupaten Bireuen Tahun 2022. *Jurnal Cakrawala Ilmiah*, 2(7), 3001–3004. <https://doi.org/10.53625/jcijurnalcakrawalailmiah.v2i7.5285>
- Atzzahra, H., Fitria, I., & Millah, N. (2021). Analisis Sensitivitas pada Model SIR Penyebaran COVID-19. *MUST: Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 6(2), 217. <https://doi.org/10.30651/must.v6i2.9666>
- Bloom, N., & Reenen, J. Van. (2013). Pemodelan Matematika. *NBER Working Papers*, 89. <http://www.nber.org/papers/w16019>
- Clinic.vaxcorpindo.com. (2023). *Campak meroket tinggi di 2023, pastikan imunisasi campak lengkap*. Clinic.Vaxcorpindo.Com. <https://clinic.vaxcorpindo.com/campak-meroket-tinggi-imunisasi-campak/>
- Edossa, D. G., Wedajo, A. G., & Koya, P. R. (2022). Stability Analysis and Optimal Control of Endemic Malaria Disease Transmission Model with Cost-Effective Strategies. *Asian Research Journal of Mathematics*, 18(11), 40–64. <https://doi.org/10.9734/arjom/2022/v18i1130425>
- Hakim, L. (2022). Strategi Kontrol Optimal Model SIQR pada Penyebaran Penyakit Campak. *Leibniz: Jurnal Matematika*, 2(2), 65–76. <https://doi.org/10.59632/leibniz.v2i2.177>
- Hassan, T. S., Elabbasy, E. M., Matouk, A. E., Ramadan, R. A., Abdulrahman, A. T., & Odinaev, I. (2022). Routh-Hurwitz Stability and Quasiperiodic Attractors in a Fractional-Order Model for Awareness Programs: Applications to COVID-19 Pandemic. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2022. <https://doi.org/10.1155/2022/1939260>
- Meksianis Z. Ndi, P. D. (2022). *Pemodelan Matematika*. PT. Nasya Expanding Management. https://books.google.co.id/books?hl=id&lr=&id=7ExhEAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=pemodelan+matematika+&ots=wICPb2wcAm&sig=X2OvGdG2QCtGO6nX4MhVN6uFMLI&redir_esc=y#v=onepage&q=pemodelan+matematika&f=false
- Mitra, A. (2021). Modified Sird Model of Epidemic Disease Dynamics: a Case Study of the Covid-19 Coronavirus. *Journal of Mechanics of Continua and Mathematical Sciences*, 16(2), 1–8. <https://doi.org/10.26782/jmcmcs.2021.02.00001>
- Naiborhu, J., & Saragih, R. (2021). *Desain Kontrol Pengobatan Pada Model SIRD Untuk Penyebaran Virus COVID-19 Menggunakan*. 15(4), 697–708.
- Nisa, S. F., Yulida, Y., & Faisal, F. (2022). Modifikasi Model Seir Pada Penyakit Campak. *Epsilon: Jurnal Matematika Murni Dan Terapan*, 16(1), 13. <https://doi.org/10.20527/epsilon.v16i1.4649>
- Olsder, G. J. 1994. *Mathematical System Theory*. Delft University of Technology: Belanda.
- Putri Yahmal. (2021). *Faktor - Faktor Yang Berhubungan Dengan Kejadian Campak*. 03(01),

1612–1615.

Putu Ari Utari, I. A. (2019). Kontrol Optimal Upaya Pengobatan Penyakit Campak Menggunakan Model Endemi SIR. *Jurnal Matematika*, 9(2), 94.
<https://doi.org/10.24843/jmat.2019.v09.i02.p115>

Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos*, Springer Verlag, New York, 1990.